第 20 卷第 2 期
1993 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol,10, No.2
Apr., 1993

双线性系统:对称代数构造*

谢小信　刘晓平　张嗣瀛
(东北工学院自动控制系·沈阳,110006)

摘要:本文根据矩阵的 Jordan 标准形建立矩阵的交换代数的构造方法,在此基础上导出双线性系统的对称代数,并给出寻找一般非线性系统的对称群的一种途径.

关键词:双线性系统;交换代数;对称代数;对称群

1 引　　言

文献[1]将对称性的概念引入线性控制系统中,并给出线性系统对称代数的定义.根据系统对称代数的不同特性,特别是半单的情形,广泛讨论了系统的结构特征.文献[3]将对称性推广到非线性系统领域,并根据系统的对称李群的结构研究了系统的结构分解.可以看出,对称性反映的是系统结构上的一种特征,它是分析系统结构的一种有力工具.近年来,已有很多利用对称代数或对称群分析系统结构的文章.但是,目前无论是对于线性系统的对称代数还是非线性系统的对称群都没有明确的寻找方法.只局限于通过直观判断而后进行验证.这就使某些系统的对称性不易被发现,或者找到的只是一个子代数或子群.本文通过矩阵的交换代数的构造,明确给出双线性系统的对称代数的构造方法.并对原点非奇异的非线性系统给出其对称群的一种构造途径.这样求出的对称代数或对称群在维数意义下都是极大的.

2 交换代数

如果未加说明,以下总认为矩阵定义在复数域上,即其元素属于复数域 C.

引理 2.1　设 J_1 和 J_2 是阶数分别为 n 和 m 的上 Jordan 块,其特征值分别为 a 和 b. A 是一 $n\times m$ 矩阵,如果 $a\neq b$,且

$$J_1A = AJ_2, \tag{2.1}$$

那么 $A=0$.

引理 2.2　设 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_r)$,其中 J_i 是特征值为 a 阶数为 n_i 的上若当块 $(i=1,2,\cdots,r)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$; $J'=\mathrm{diag}(J'_1,J'_2,\cdots,J'_u)$,其中 J'_j 是特征值为 b 阶数为 m_j 的上若当块 $(j=1,2,\cdots,u)$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{u}m_j=m$. A 是一 $n\times m$ 矩阵.如果 $a\neq b$ 且

$$JA = AJ', \tag{2.2}$$

那么 $A=0$.

证明可由引理 2.1 推出.

---

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于1991年6月14日收到.1991年9月23日收到修改稿.

引理 2.3 设 J_1 和 J_2 是阶数分别为 n 和 m 并且具有同一特征值的上若当块. A 是一 $n\times m$ 矩阵. 如果

$$J_1A = AJ_2, \tag{2.3}$$

那么 1) $n=m$ 时

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix}; \tag{2.4}$$

2) $n>m$ 时

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.5}$$

3) $n<m$ 时

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m(a_n)$是参数.

定义 2.1 设 A 是一 n 阶方阵,下面的 n 阶方阵的集合

$$G(A) = \{S \in gl(n,\mathrm{C}) \mid SA = AS\}$$

叫做矩阵 A 的交换代数.

下面说明交换代数的构造方法. 设 A 是一 n 阶方阵,那么存在 n 阶非奇异矩阵 P,使得

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_k)$$

是 A 的 Jordan 标准形. 其中 $A_i=\mathrm{diag}(J_{i1},J_{i2},\cdots,J_{ik_i})$,$J_{ij}(1\leqslant j\leqslant k_i)$是特征值为 a_i 的上若当块,$i=1,2,\cdots,k$,且 $a_i\neq a_j(i\neq j)$.

假定 $\widetilde{S}\in G(\widetilde{A})$. 置 $\widetilde{S}=(\widetilde{S}_{ij})_{k\times k}$是相应于 $\widetilde{A}$ 的分块. 从 $\widetilde{S}\widetilde{A}=\widetilde{A}\widetilde{S}$ 可得

$$\widetilde{S}_{ij}A_j = A_i\widetilde{S}_{ij}. \tag{2.7}$$

这里 $i,j=1,2,\cdots,k$. 由引理 2.2 知当 $i\neq j$ 时,$\widetilde{S}_{ij}=0$. 因此

$$\widetilde{S} = \mathrm{diag}(\widetilde{S}_{11},\widetilde{S}_{22},\cdots,\widetilde{S}_{kk}),$$

$$\widetilde{S}_{ii}A_i = A_i\widetilde{S}_{ii}, \quad 1\leqslant i\leqslant k. \tag{2.8}$$

固定 i,相应于 A_i 的分块置 $\widetilde{S}_{ii}=(S_{uv})_{k_i\times k_i}$,那么(2.8)式即

$$S_{uv}J_{iv} = J_{iu}S_{uv} . \tag{2.9}$$

这里 $u,v=1,2,\cdots,k_i$. 这样 S_{uv}可由引理2.3来确定. 这样就得到 $\tilde{S}$,取 $S=P\tilde{S}P^{-1}$,那么

$$G(A)=\{S\}$$

就是 A 的交换代数.

3 双线性系统的对称代数

双线性系统是介于线性系统与非线性系统之间的一类控制系统. 为了保持其双线性特性,状态变换必须选择线性变换. 因此,这里沿用线性系统对称代数的概念,给出如下的

定义 3.1 对于如下的双线性控制系统

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{m}u_iB_ix. \tag{3.1}$$

其中 $x\in\mathrm{R}^n$,$u_i\in\mathrm{R}(i=1,\cdots,m)$分别是系统的状态变量和控制变量. $A,B_1,\cdots,B_m\in gl(n,\mathrm{R})$,下面的 n 阶方阵的集合

$$L(\mathrm{R})=\{S\in gl(n,\mathrm{R})\,|\,SA=AS,\quad SB_i=B_iS,\quad i=1,\cdots,m\}$$

叫做系统(3.1)的对称代数.

$L(\mathrm{R})$也叫做系统(3.1)的实对称代数. 如果上述集合中的元素定义在复数域内,将集合记为 $L(\mathrm{C})$,则称 $L(\mathrm{C})$为系统(3.1)的复对称代数.

如果 $L(\mathrm{R})$中的元素都是非奇异的,则易知 $L(\mathrm{R})$关于矩阵乘法构成一个群,它是一般线性群 $GL(n,\mathrm{R})$的一个子群. 定义 $\Phi:L(\mathrm{R})\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n:(S,x)\mapsto Sx$,可以看出系统(3.1)具有对称代数 $L(\mathrm{R})$等价于系统(3.1)具有无穷小状态空间对称$(L(\mathrm{R}),\Phi)$[3]. 因此这里对称代数的定义与[3]里关于非线性系统对称性的定义是一致的.

根据定义并结合前一节不难知道

$$L(\mathrm{C})=G(A)\cap G(B_1)\cap\cdots\cap G(B_m),$$

即是说,通过求 $A,B_1,\cdots,B_m$ 的交换代数就可得出系统(3.1)的复对称代数. 设 $S\in L(\mathrm{C})$,那么可将 S 写为 $S=S_1+iS_2$,其中 $S_1,S_2\in gl(n,\mathrm{R})$,当 S 取遍 $L(\mathrm{C})$时,可得如下两个集合

$$L_1=\{S_1\},\quad L_2=\{S_2\}.$$

它们都是系统(3.1)的实对称代数. 事实上还有 $L_1=L_2=L(\mathrm{R})$.

例 1 在系统(3.1)中设 $m=1$ 并取

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\-1&-1&3\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&-1&4\end{bmatrix},$$

令

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\quad 则\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix},$$

那么矩阵 A 的若当标准形为

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

这样由前面可知

$$\widetilde{S}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & c\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix},$$

从而

$$S=P\widetilde{S}P^{-1}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ a-b & b-c & c\\ a-b & -c & b+c\end{bmatrix},$$

使得 $G(A)=\{S\}$,其中 $a,b,c\in\mathrm{C}$.

用同样方法可以求得 B_1 的交换代数 $G(B_1)=\{S_1\}$,这里

$$S_1=\begin{bmatrix}x & -z & z\\ x-y_1+w & -z+y_1-y_2 & z+y_2\\ x-y_1+w & -z-y_2 & z+y_1+y_2\end{bmatrix}.$$

其中 $x,y_1,y_2,z,w\in\mathrm{C}$.

为求得 $G(A)\cap G(B_1)$,令 $S=S_1$,不难得出 $z=w=0,a=x,b=y_1,c=y_2$. 故

$$G(A)\cap G(B_1)=\left\{\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ a-b & b-c & c\\ a-b & -c & b+c\end{bmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathrm{C}\right\}=G(A).$$

当 a,b,c 在实数域内取值时,上式就是系统的实对称代数.

4　非线性系统的对称群

下面是非线性控制系统的一般形式

$$\dot{x}=f(x,u). \tag{4.1}$$

其中 $x\in\mathrm{R}^n,u\in\mathrm{R}^m,f:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^n$ 在这里认为是关于 x 的可微函数.

定义 4.1　系统(4.1)如果满足

$$A_f=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}\neq 0,$$

则称系统(4.1)是关于原点 $o\in\mathrm{R}^n$ 非奇异的.

定义 4.2　设 $G\subset GL(n,\mathrm{R})$是一个群,如果对任一 $g\in G$,系统(4.1)满足

$$gf(x,u)=f(gx,u), \tag{4.2}$$

则称系统(4.1)关于 G 具有状态对称.

如果令 $\Phi:G\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n:(g,x)\mapsto gx$,可知这一定义等价于系统(4.1)具有无穷小状态空间对称(G,Φ).

定理 4.1　设系统(4.1)是原点非奇异的. 如果系统关于 G 具有状态对称,那么

$$G\subset G(A_f).$$

证　设 $\dim G>0$,否则 $G=\{I_n\}\subset G(A_f)$. 将 f 在原点展成如下形式

$$f=f(0)+A_fx+h(x). \tag{4.3}$$

其中 $h(x)$满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial h(x)}{\partial x}=0. \tag{4.4}$$

由状态对称的定义及(4.3),(4.4)知对于 $g\in G$,

$$gA_f = A_f g.$$

从而 $G\subset G(A_f)$.

从定理可看出,对系统(4.1)对称群的寻找可限于 $G(A_f)$内.这就缩小了寻找范围.

参考文献

[1] Hazewinkel, M. and Martin, C.. Symmetric Linear Systems: An Application of Algebraic Systems Theory. Int. J. Control, 1983, 37(6):1371—1384

[2] Lewis, J., McCasland, R. and Martin, C.. Symmetric Systems:Structure of the State Space. Int. J. Control, 1986, 43 (1):59—64

[3] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I.. The Structure of Nonlinear Control Systems Possessing Symmetries. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, 30(3):248—257

[4] 甘特马赫尔. 矩阵论. 柯召译. 高等教育出版社,1955

Bilinear Systems: Construction of Symmetry Algebras

XIE Xiaoxin, LIU Xiaoping and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper the construction of commutative algebras for a matrix is estabilished according to its Jordan canonical matrix. From this the symmetry algebra of a bilinear system is derived and a way of finding the symmetry group for a nonlinear system is presented.

Key words: bilinear system; commutative algebra; symmetry algebra; symmetry group

本文作者简介

谢小信 1966年生. 1988年毕业于阜阳师范学院数学系,同年考入东北工学院自动控制系攻读硕士学位,于1990年毕业. 现正在东北工学院自动控制系攻读博士学位. 研究方向包括非线性系统,奇异系统等.

刘晓平 1962年生. 分别于1984年、1987年、1989年在东北工学院自动控制系获学士、硕士和博士学位. 毕业后留校任教并于1991年晋升为副教授. 研究工作包括最优控制,微分对策,广义系统及非线性系统并在国内外发表学术论文40余篇.

张嗣瀛 1925年生. 1948年毕业于武汉大学,1957年至1959年在苏联莫斯科大学数学力学系进修运动稳定性及自动控制理论. 现任东北工学院教授,中国自动化学会常务理事,《控制与决策》主编. 目前主要从事微分对策,复杂控制系统的结构等方面的研究.