第10卷第4期
1993年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

奇异H_∞状态反馈问题的降阶递推解法*

吕跃飞　戴冠中
(西北工业大学自动控制系·西安,710072)

摘要：本文研究了奇异H_∞状态反馈问题的解法,证明了这类问题有解的充要条件是相应的降阶系统存在H_∞控制器,给出了求解H_∞状态反馈矩阵的降阶递推法. 文中算例表明本文提出的方法是一种直观易解的有效的方法.

关键词：H_∞控制；代数 Riccati 方程；稳定性；状态反馈

1 引　言

近年来H_∞控制问题得到了非常广泛的研究,在一些"标准"假设下,其状态反馈、输出反馈解都可通过求一个或二个代数 Riccati 方程而得到[1,2]. 然而很多实际问题并不满足目前所做的假设,因而使H_∞控制理论的应用受到了限制,特别是当误差方程中控制输入的前馈矩阵不是列满秩时(这种问题被称为奇异H_∞控制问题),目前尚没有令人满意的解法,而这种情况在参数不确定系统的鲁棒稳定化问题的研究中是很常见的[3],因此研究非"标准"问题,得到更普遍、更完整的解法是H_∞控制问题目前的研究课题之一.

本文将讨论这些非"标准"情况下的H_∞状态反馈问题,给出这种情况下解存在的充要条件以及一种解的求法.

2 问题的描述

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fw, \tag{1}$$

$$z = Cx + Du. \tag{2}$$

这里$x\in R^n$是状态变量,$u\in R^q$是控制输入,$w\in R^r$表示干扰向量,$z\in R^m$是被控制的误差向量,A,B,F,C和D是已知的具有适当维数的实定常矩阵. 我们的问题是:

(W):寻找状态反馈矩阵K,使$A+BK$是稳定的,且当$u=Kx$时,从干扰w到误差向量z的闭环传递函数

$$Z(s) = (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}F \tag{3}$$

满足范数条件

$$\| Z(s) \|_\infty < r, \tag{4}$$

这里$r>0$是预先给定的实数.

显然问题(W)有解的必要条件是

A_1) (A,B)是可稳定的;

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1991年11月4日收到. 1992年12月31日收到修改稿.

为求得问题(W)的解,很多文献还作了如下的假定:

A_2) 秩 $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B \\ C & D \end{bmatrix}=n+q,\forall\ \omega$ 是实数;

A_3) 秩 $D=q$,即 D 是列满秩的.

在条件 A_1),A_2)和 A_3)的假定下,问题(W)的解将由下面的定理给出.

定理 1[4] 问题(W)有解的充要条件为:存在矩阵 $P\geqslant 0$,是下式代数 Riccati 方程的解

$$(A-B(D^TD)^{-1}D^TC)^TP+P(A-B(D^TD)^{-1}D^TC)+P(\frac{1}{r}FF^T-B(D^TD)^{-1}B^T)P$$

$$+C^T(I-D(D^TD)^{-1}D^T)C=0, \tag{5}$$

这时 K 可选择为

$$K=-(D^TD)^{-1}(D^TC+B^TP). \tag{6}$$

这里上标"T"表示矩阵的转置.

事实上假设条件 A_2)和 A_3)并不是必要的.本文下面将给出假设条件 A_2),A_3)不满足时,H_∞状态反馈问题的解法及其有关的定理.

3 基本方法与定理

若矩阵 D 不是列满秩的,设其秩为 $q_1<q$,存在一可逆矩阵 $N\in R^{q\times q}$,使

$$\begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ D \end{bmatrix}N=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 \\ \hdashline D_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

这里 $D_1\in R^{m\times q_1}$,秩 $D_1=q_1$,$B_1\in R^{n\times q_1}$,$B_2\in R^{n\times q_2}$,$q_1+q_2\leqslant q$,秩 $B_2=q_2$.作控制变量代换

$$u=Nv,\quad v^T=[v_1^T,\ v_2^T,\ v_3^T]^T. \tag{8}$$

这里 $v_1\in R^{q_1}$,$v_2\in R^{q_2}$,v_3 具有合适的维数,则系统方程(1),(2)可写为

$$\dot{x}=Ax+B_1v_1+B_2v_2+Fw, \tag{9}$$

$$z=Cx+D_1v_1. \tag{10}$$

若 $q_2=0$,即 $B_2=0$,我们可以利用定理 1 来求解问题(W).

若 B_2 是一可逆的方阵,选实常数 a 满足

$$a>(1+\|(I-D_1(D_1^TD_1)^{-1}D_1^T)CF\|_\infty)r^{-1}. \tag{11}$$

令

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(D_1^TD_1)^{-1}D_1^TC \\ -B_2^{-1}(A-B_1(D_1^TD_1)^{-1}D_1^TC+aI_n) \end{bmatrix}x. \tag{12}$$

这里 I_n 表示 n 阶单位矩阵,则系统方程(9)和(10)变为

$$\dot{x}=-ax+Fw, \tag{13}$$

$$z=(I-D_1(D_1^TD_1)^{-1}D_1^T)Cx, \tag{14}$$

闭环传递函数 $Z(s)$满足范数条件(4),且系统是稳定的.

若 $0<q_2<n$,选择矩阵 $B_2^\dagger\in R^{n\times(n-q_2)}$使 $T=[B_2^\dagger\ B_2]$是一可逆的方阵.并设其逆可分块表示为 $T^{-1}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$,这里 $T_1\in R^{(n-q_2)\times n}$,$T_2\in R^{q_2\times n}$,引入新的状态变量

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1x \\ T_2x \end{bmatrix}=T^{-1}x, \tag{15}$$

则系统方程(9)和(10)与如下的方程组是等价的，

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}v_1 + F_1w, \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{21}v_1 + v_2 + F_2w, \tag{17}$$

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + D_1v_1. \tag{18}$$

这里

$$[C_1 \quad C_2] = [CB_2^{\dagger} \quad CB_2] = CT, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1AB_2^{\dagger} & T_1AB_2 \\ T_2AB_2^{\dagger} & T_2AB_2 \end{bmatrix} = T^{-1}AT, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1B_1 \\ T_2B_1 \end{bmatrix} = T^{-1}B_1, \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1F \\ T_2F \end{bmatrix} = T^{-1}F. \tag{21}$$

对于上述方程组我们有

定理 2　问题(W)有解的充分条件是如下的降阶系统

$$\dot{x}_1 = A'x_1 + B'u' + F_1w, \tag{22}$$

$$z_1 = C_1x_1 + D'u'. \tag{23}$$

这里

$$A' = A_{11}, \quad B' = [B_{11} \quad A_{12}], \quad D' = [D_1 \quad C_2], \tag{24}$$

存在状态反馈矩阵 $K' \in \mathrm{R}^{(q_1+q_2)\times(n-q_2)}$，使

$$\bar{A}' = A' + B'K' \tag{25}$$

是稳定的. 且

$$Z_1(s) = (C_1 + D'K')(sI - \bar{A}')^{-1}F_1 \tag{26}$$

满足范数条件

$$\| Z_1(s) \|_\infty < r - \varepsilon, \tag{27}$$

这里 ε 是任意小的正实数.

若方程组(16),(17),(18)满足假设条件 A_2)，则上述充分条件也是必要的.

证　必要性的证明参见附录，这里仅证充分性. 若定理 2 中的 K' 存在. 设

$$L_1 = [I_{q_1} \quad 0]K', \quad L_2 = [0 \quad I_{q_2}]K', \tag{28}$$

$$Z_2(s) = ((C_1 + D'K')(sI - \bar{A}')^{-1}A_{12} + C_2)(F_2 - L_2F_1). \tag{29}$$

因 $\bar{A}'$ 是稳定的，所以范数 $\| Z_2(s) \|_\infty$ 有界. 选取实常数

$$a > \| Z_2(s) \|_\infty \varepsilon^{-1}, \tag{30}$$

则

$$Z_a(s) = ((C_1 + D'K')(sI - \bar{A}')^{-1}A_{12} + C_2)(s+a)^{-1}(F_2 - L_2F_1) = \frac{Z_2(s)}{s+a} \tag{31}$$

满足

$$\| Z_a(s) \|_\infty \leqslant \| Z_2(s) \|_\infty \left\| \frac{1}{s+a} \right\|_\infty = \frac{1}{a} \| Z_2(s) \|_\infty < \varepsilon. \tag{32}$$

令

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$K = \left[\begin{array}{c:c} L_1 & 0 \\ \hdashline -A_{21} - B_{21}L_1 + L_2(A_{11} + B_{11}L_1) + aL_2 & -A_{22} + L_2A_{12} - aI_{q_2} \end{array}\right], \tag{33}$$

并作状态变量代换

$$x_a = x_2 - L_2x_1, \tag{34}$$

则方程组(16),(17),(18)变为

$$\dot{x}_1 = \bar{A}'x_1 + A_{12}x_2 + F_1w, \tag{35}$$

$$\dot{x}_a = -ax_a + (F_2 - L_2F_1)w, \tag{36}$$

$$z = (C_1 + D'K')x_1 + C_2x_a. \tag{37}$$

由此看出采用式(33)的控制则系统是稳定的，且闭环传递函数

$$Z(s) = Z_1(s) + Z_a(s) \tag{38}$$

满足

$$\|Z(s)\|_\infty \leqslant \|Z_1(s)\|_\infty + \|Z_a(s)\|_\infty < r - \varepsilon + \varepsilon = r. \tag{39}$$

充分性得证.

定理 2 表明奇异 H_∞状态反馈问题可以通过降阶递推的方法来解决. 若降阶系统(22),(23)仍然是奇异的，我们还可利用式(7)对 $\begin{bmatrix} B' \\ D' \end{bmatrix}$ 进行分解，再重复以上的分析步骤对降阶系统进行研究，或对降阶系统(22),(23)再次进行降阶递推，因状态变量维数有限，所以多次递推后必可求得最终的结果.

4 降阶递推法

根据第3节的讨论，我们得到了求解奇异 H_∞状态反馈问题的降阶递推法，现将其主要步骤总结如下：

初始化：降阶次数计数器 $i=0$；

第1步 对第 i 次降阶后的系统(如(22),(23))利用式(7)对其控制输入阵进行分解，并作控制变量代换(8)；

第 2 步 若代换后得到的系统是非奇异的，即 $B_2=0$，利用定理 1 来求解问题(W)，转步 5，否则进行步 3；

第 3 步 若 B_2 为方阵，利用公式(12)求得反馈矩阵后转步 5，否则进行步 4；

第 4 步 利用定理 2 进行降阶处理，令 $i=i+1$，转步 1；

第 5 步 若 $i=0$，递推结束，否则进行步 6；

第 6 步 利用公式(33)求第 $i-1$ 次降阶后所得系统的状态反馈矩阵，令 $i=i-1$，转步 5.

5 算 例

设系统由如下方程给出

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] u + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline 1 \\ 1 \end{array}\right] w, \tag{40}$$

$$z = \left[\begin{array}{c:cc} -1 & 1 & -1 \end{array}\right] x. \tag{41}$$

求 H_∞状态反馈阵，使 $\|Z(s)\|_\infty < 0.5$.

解 问题为奇异问题，$D=0, B_1=0, B_2=B$，B_2不为零也不是方阵，对系统进行降阶，得

$$\dot{x}_1 = x_1 + [1 \quad 1]u' + w, \tag{42}$$

$$z_1 = -x_1 + [1 \quad -1]u'. \tag{43}$$

该降阶系统仍是奇异的. 作控制变量代换

$$u' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}, \tag{44}$$

代入方程(42)和(43)后,根据公式(12)取 $a=-1$,得

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix} x_1,$$

即

$$u' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} x_1. \tag{45}$$

代入方程(42)和(43)得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + w, \tag{46}$$

$$z_1 = 0 \tag{47}$$

降阶系统是稳定的,且$\|Z_1(s)\|_\infty=0<0.5$,所以原系统有解,其解根据公式(33)计算后,得

$$K = \begin{bmatrix} -2.5-0.5a_1 & -2.5-a_1 & -0.5 \\ -4.5-1.5a_1 & -3.5 & -2.5-a_1 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

常数 a_1 由公式(30),经计算得:$a_1>2$. 取 $a_1=2.5$,则

$$K = \begin{bmatrix} -3.75 & -5 & -0.5 \\ -5.25 & -3.5 & -5 \end{bmatrix} \tag{49}$$

即为所要求的一个解.

6 结　论

本文给出了求解奇异H_∞状态反馈问题的降阶递推方法,证明了奇异H_∞状态反馈问题有解的充要条件是其降阶系统的H_∞状态反馈问题有解. 本文的方法即使当 D 的列数大于行数时仍然可以应用,与文献[4]中所采用的 D 矩阵摄动法相比,更深刻地揭示出系统内在的控制规律,便于用解析法分析解的存在性,而且求解降阶 Riccati 方程更容易.

参 考 文 献

[1] Kimura, H., Lu Yuefei and Kawatani, R.. On the Structure of H^∞ Control Systems and Related Extensions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36:653—667

[2] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A.. State Space Solutions to Standard H^2 and H^∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34:831—897

[3] 吕跃飞,戴冠中. 参数不确定系统鲁棒可稳定性的几何构造分析. 控制理论与应用年会论文集,南京,1992,199—202

[4] Stroorvoyel, A. A.. H^∞ Control with State Feedback. Proceedings. MTNS-89, Amsterdam, 1989

附　录

定理 2 中的必要性的证明.

引理 1[2]　设 $Z(s)=C(sI-A)^{-1}F$,(A,F)是能稳定的,(C,A)是可检测的,则下面二个结论是等价的:

1) A 是稳定的,且$\|Z(s)\|_\infty<1$.

2) 存在矩阵 $P\geq 0$,是如下代数 Riccati 方程的解 $A^TP+PA+PFF^TP+C^TC=0$. 且 $A+FF^TP$ 是稳定的.

引理 2　设 P 是 n 维半正定对称矩阵,则对任一正整数 $q<n$,存在正交矩阵 $T_0\in R^{q\times q}$和实矩阵 $L_0\in R^{q\times(n-q)}$,使

$$\begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ L_0 & T_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ L_0 & T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

这里 $P_1 \in \mathrm{R}^{(n-q)\times(n-q)}, \quad P_2 \in \mathrm{R}^{q\times q}.$

这个引理的证明不难，在此略去. 下面来证定理2的必要性. 不失一般性，设(4)中 $r=1$.

设矩阵 $K\in \mathrm{R}^{(q_1+q_2)\times n}$是由方程组(16)，(17)和(18)所描述系统的 H_∞状态反馈阵，据引理 1 如下代数 Riccati 方程

$$(A_N + B_NK)^{\mathrm{T}}P + P(A_N + B_NK) + PFF^{\mathrm{T}}P + (C_N + D_NK)^{\mathrm{T}}(C_N + D_NK) = 0 \tag{a1}$$

有解 $P\geqslant 0$，这里

$$A_N = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_N = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{q_2} \end{bmatrix}, \quad C_N = [C_1 \quad C_2], \quad D_N = [D_1 \quad 0] \tag{a2}$$

分别由式(20)，(21)，(19)和(7)给出. 由引理 2 对(7)式给定的 q_2，存在正交矩阵 $T_0\in \mathrm{R}^{q_2\times q_2}$和实矩阵 $L_0 \in \mathrm{R}^{q_2\times(n-q_2)}$，使

$$\begin{bmatrix} I_{n-q_2} & 0 \\ L_0 & T_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P \begin{bmatrix} I_{n-q_2} & 0 \\ L_0 & T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = P_0. \tag{a3}$$

这里 $P_1\in \mathrm{R}^{(n-q_2)\times(n-q_2)}$，$P_2\in \mathrm{R}^{q_2\times q_2}$. 令 $L=\begin{bmatrix} I_{n-q_2} & 0 \\ L_0 & T_0 \end{bmatrix}$，在方程(a1)两端分别乘以 L^{T} 和 L，得

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P_0 + P_0\overline{A} + P_0\overline{F}\overline{F}^{\mathrm{T}}P_0 + \overline{C}^{\mathrm{T}}\overline{C} = 0, \tag{a4}$$

这里 $\overline{A} = L^{-1}(A_N + B_NK)L, \quad \overline{F} = L^{-1}F, \quad \overline{C} = (C_N + D_NK)L.$

依照(a2)式和(a3)式的分块形式，将 $\overline{A}$，$\overline{F}$，$\overline{C}$ 和 K 进行分块，即

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \overline{F} = \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = [\overline{C}_1 \quad \overline{C}_2], \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \tag{a5}$$

则

$$\overline{A}_{11} = A_{11} + B_{11}L_1 + A_{12}L_0, \quad \overline{A}_{12} = (A_{12} + B_{11}K_{12})T, \tag{a6}$$

$$\overline{C}_1 = C_1 + D_1L_1 + C_2L_0, \quad \overline{C}_2 = (C_2 + D_1K_{12})T, \tag{a7}$$

$$\overline{F}_1 = F_1, \quad \overline{F}_2 = T^{-1}(F_2 - L_0F_1). \tag{a8}$$

这里

$$L_1 = K_{11} + K_{12}L_0. \tag{a9}$$

$\overline{A}_{21}$与 $\overline{A}_{22}$的表达式较复杂，将不具体写出了. 将方程(a4)依(a5)式的分块形式进行分块，得

(1,1) 子块
$$\overline{A}_{11}^{\mathrm{T}}P_1 + P_1\overline{A}_{11} + P_1F_1F_1^{\mathrm{T}}P_1 + \overline{C}_1^{\mathrm{T}}\overline{C}_1 = 0, \tag{a10}$$

(1,2) 子块
$$\overline{A}_{21}^{\mathrm{T}}P_2 + P_1\overline{A}_{12} + P_1F_1\overline{F}_2^{\mathrm{T}}P_2 + \overline{C}_1^{\mathrm{T}}\overline{C}_2 = 0, \tag{a11}$$

(2,1) 子块
$$\overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}P_1 + P_2\overline{A}_{21} + P_2\overline{F}_2F_1^{\mathrm{T}}P_1 + \overline{C}_2^{\mathrm{T}}\overline{C}_1 = 0, \tag{a12}$$

(2,2) 子块
$$\overline{A}_{22}^{\mathrm{T}}P_2 + P_2\overline{A}_{22} + P_2\overline{F}_2\overline{F}_2^{\mathrm{T}}P_2 + \overline{C}_2^{\mathrm{T}}\overline{C}_2 = 0. \tag{a13}$$

根据这 4 个方程，我们得出结论：

1° 若式(a6)所示的 $\overline{A}_{11}$是稳定的，则定理 2 的必要性成立.

2° 若 $\overline{A}_{11}$不稳定，则存在矩阵 $L_2\in \mathrm{R}^{q_2\times(n-q_2)}$，使 $\overline{A}_{11}+\overline{A}_{12}L_2$ 是稳定的，且 $P_2L_2=0$.

3° 若 2°中的 L_2 存在，则定理 2 的必要性成立.

证　根据引理 1 以及方程(a10)，1°是显然的. 下面我们先证 3°.

若 2°中 L_2 存在，由(a13)式，$\overline{C}_2L_2=0$，又由(a11)式得 $P_1\overline{A}_{12}L_2=0$，因此由式(a10)得

$$(\overline{A}_{11} + \overline{A}_{12}L_2)^{\mathrm{T}}P_1 + P_1(\overline{A}_{11} + \overline{A}_{12}L_2) + P_1F_1F_1^{\mathrm{T}}P_1 + (\overline{C}_1 + \overline{C}_2L_2)(\overline{C}_1 + \overline{C}_2L_2) = 0. \tag{a14}$$

由引理 1 知 3°成立. 下面证明 2°：

若 $\overline{A}_{11}$不稳定，设 λ 是 $\overline{A}_{11}$的一个不稳定极点，y 是其对应的特征向量，即 $\overline{A}_{11}y=\lambda y$，在(a10)式两边分别乘以 y 和 $\tilde{y}$(符号～表示共轭转置)得

$$2\mathrm{Re}\lambda\tilde{y}P_1y + \tilde{y}P_1F_1F_1^{\mathrm{T}}P_1y + \tilde{y}\overline{C}_1^{\mathrm{T}}\overline{C}_1y = 0, \tag{a15}$$

即

$$\mathrm{Re}\lambda\tilde{y}P_1y = 0, \quad F_1^{\mathrm{T}}P_1y = 0, \ \overline{C}_1y = 0. \tag{a16}$$

若Reλ=0,则

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda I & A_{12} & B_{11} \\ C_1 & C_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ L_0 \\ L_1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11}-\lambda I \\ \overline{C}_1 \end{bmatrix} y = 0, \tag{a17}$$

即系统在虚轴上有零点,与假设A2)相矛盾.若Reλ>0,则$P_1y=0$,由(a12)式还可得$P_2\overline{A}_{21}y=0$,这意味着P_1与P_2都不满秩,否则$\overline{A}$有不稳定的极点λ(因为$\overline{A}_{21}y=0$,意味着$(\overline{A}-\lambda I)\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}=0$).

设H_1和H_2分别是P_1和P_2的正交补矩阵,即$P_1H_1=0$,$P_2H_2=0$,而秩$H_1=n-q_2-$秩P_1,秩H_2等于q_2-秩P_2,由方程组(a10),(a11),(a12),(a13)得

$$P_1\overline{A}_{11}H_1=0, \quad P_1\overline{A}_{12}H_2=0, \quad P_2\overline{A}_{21}H_1=0, \quad P_2\overline{A}_{22}H_2=0.$$

若结论2°不成立,则存在一复数λ,Reλ>0,和非零向量$\alpha\in R^{1\times(n-q_2)}$,使$\alpha[\overline{A}_{11}-\lambda I,\overline{A}_{12}H_2]=0$,由方程(a10)知$\begin{bmatrix}\alpha \\ P_1\end{bmatrix}$的秩大于$P_1$的秩,也就是不存向量$\beta\in R^{1\times(n-q_2)}$,使$\beta P_1=\alpha$.因为

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} [\overline{A}-\lambda I] \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{a18}$$

即$[\overline{A}-\lambda I]\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$的零化空间维数大于$\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$的零化空间的维数,所以$[\overline{A}-\lambda I]$不是满秩矩阵,$\overline{A}$有不稳定特征根$\lambda$,与$K$的假设矛盾. 证毕.

A Reduced Order Recursive Solution for the Problem of Singular H$_\infty$ State Feedback

LÜ Yuefei and DAI Guanzhong

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University·Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: In this paper, a reduced order recursive solution is derived to the singular H$_\infty$ state feedback problems, where no restriction is imposed on the feedthrough matrix from the control input to the error. A controller exists if and only if the solution to a reduced order H$_\infty$ state feedback problem exists. An illustrative example shows that the method is direct and easy to use.

Key words: state feedback; H$_\infty$ control; algebraic Riccati equation; stabilization

本文作者简介

吕跃飞 1960年生.1984年于西北工业大学计算机系硕士研究生毕业.1988年至1990年在日本国大阪大学进修.现为西北工业大学副教授.主要研究兴趣为H$_\infty$控制,鲁棒控制理论及其工程应用等.

戴冠中 见本刊1993年第1期第12页.