第10卷第4期
1993年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

受控中心流形与非线性临界镇定*

吉英存　高为炳
(北京航空航天大学第七研究室，100083)

摘要：文中我们运用中心流形理论研究了临界非线性系统的局部渐近镇定问题. 给出了可控临界指数的概念，在一定条件下得到了运用静态光滑反馈可镇定的充要条件.

关键词：可控临界指数；反馈镇定；中心流形；受控不变性

1 引　言

近年来，非线性系统的镇定问题又引起了人们的极大兴趣[1~3]. 在本文中，我们运用受控不变流形来处理局部镇定问题. 我们的基本想法是：先让原系统限制在某个受控不变子流形具有良好的渐近性质，然后让该受控不变流形具有吸引性.

2 可控临界指数与局部镇定

考虑系统 Σ：

$$\dot{x} = f(x,u). \tag{2.1}$$

其中 $f(0,0)=0$，$x\in \mathrm{R}^n$，$u\in \mathrm{R}^m$，$f(\cdot)\in C^\infty$. 如果存在 $u=\alpha(x)$，$\alpha(0)=0$，$\alpha(\cdot)\in C^\infty$ 使得闭环系统的原点是局部渐近稳定的，则称系统(2.1)在原点是可局部光滑静态反馈镇定的.

从 Brockett 的必要条件[2]，我们知道，就局部光滑反馈镇定而言只须考虑临界情形，也就是系统 Σ 相应的线性化系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.2}$$

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u}$$

具有不可控的实部为零的特征值.

定义 2.1　系统 $\dot{x}=N(x)$，$x\in \mathrm{R}^n$，具有临界指数 (α,β) 是指其线性化系统具有 α 个零根和 β 对纯虚根.

定义 2.2　控制系统(2.1)具有可控临界指数 (α^*,β^*) 是指我们可以适当选择光滑反馈 $u=\delta(x)$，$\delta(0)=0$ 使得闭环系统具有临界指数 (α^*,β^*).

记 $\Delta=$所有可控临界指数 (α^*,β^*) 组成的集合. 则 Δ 具有性质：

1) 其由线性化系统(2.2)决定.

2) 元素是有限的.

系统可控临界指数的概念对于镇定问题的作用可用如下例子说明.

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1991年11月18日收到. 1992年7月11日收到修改稿.

例 1

$$\dot{x} = x^2(x - 2y^3),$$
$$\dot{y} = u.$$

该系统可控临界指数集 $\Delta=\{(1,0),(2,0)\}$. 易证该系统在可控临界指数(1,0)下是不可镇定的. 见[6]或[5],而 Boothby & Marino 证明 $u=x-y^3$ 是一个全局镇定律. 此时可控临界指数为(2,0). 这说明一个控制系统在低临界程度下不可镇定,但在高临界程度下也许是可镇定的.

3 一个镇定定理

考虑一般的非线性系统(2.1),设$(\bar{\alpha},\bar{\beta})$是它的一个可控临界指数,亦即$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in\Delta$,则总可以通过坐标变换,坐标重排以及线性预反馈将(2.1)化成如下形式

$$\dot{x} = A^0x + \tilde{f}(x,\xi,u), \tag{3.1a}$$
$$\dot{\xi} = A^-\xi + Bu + \tilde{g}(x,\xi,u). \tag{3.1b}$$

其中 $x\in R^e,\xi\in R^{n-e},u\in R^m,\tilde{f}(\cdot),\tilde{g}(\cdot)\in C^\infty,\mathrm{Re}(\lambda(A^0))=0$,其中有 $\bar{\alpha}$ 个零根,$\bar{\beta}$ 对纯虚根. $\{A^-,B\}$可镇定,不妨设 $\mathrm{Re}(\lambda(A^-))<0,\tilde{f}(0,0,0)=0$.

$$\tilde{g} = (0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial\tilde{f}(0,0,0)}{\partial(x,\xi,u)} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{g}(0,0,0)}{\partial(x,\xi,u)} = 0.$$

我们先考虑如下串接系统

$$\dot{x} = A^0x + \tilde{f}(x,\xi), \tag{3.2a}$$
$$\dot{\xi} = A^-\xi + Bu + \tilde{g}(x,\xi,u). \tag{3.2b}$$

这里 $\tilde{f}(0,0)=0,\dfrac{\partial\tilde{f}(0,0)}{\partial(x,\xi)}=0$. 其余假设见上.

定理 3.1 系统(3.2)可以采用 $u=c(x),c(0)=0,\dfrac{\partial c(0)}{\partial x}=0$ 来镇定,当且仅当如下条件满足:

i) 存在 $\pi(x),\pi(0)=0,\dfrac{\partial\pi(0)}{\partial x}=0$ 使得系统 $\dot{x}=A^0x+\tilde{f}(x,\pi(x))$渐稳.

ii) 方程 $\dfrac{\partial\pi(0)}{\partial x}(A^0x+\tilde{f}(x,\pi(x)))=A^-(\pi(x))+Bu+\tilde{g}(x,\pi(x),u)$有解 $u=c(x)$.

证 运用中心流形定理易得[4].

注 1 我们这里本质上是让低维系统的镇定律也是整个系统的中心流形. 但和通常的从高维到低维的降阶不一样. 我们是由低维到高维.

注 2 定理 3.1 中我们让 $c(0)=0,\dfrac{\partial c(0)}{\partial x}=0$ 是为了保证系统的线性结构不变. 由于系统的可控临界指数集 $\Delta=\{(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_k,\beta_k)\}$是有限的. 因此,从理论上讲,我们总可以选择线性预反馈 $u=k\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix}$ 使得系统具有(3.2)的结构,然后再运用该定理. 从而 $u=k\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix}+c(x)$即为原系统的一个局部镇定律.

注 3 易证最小相位系统可镇定是该定理的一个简单推论.

注 4 对一般的非线性系统(3.1)也有类似结论,但此时 $\pi(x)$的选取与 $c(x)$的选取没有分离性质,耦合在一起.

4 求镇定律的步骤及示例

第一步　求出系统(3.2)的可控临界指数集 $\Delta=\{(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_k,\beta_k)\}$，其中 α_1,β_1 是系统不可控的零根的个数和不可控的纯虚根的对数. 则受控不变中心流形的维数至少为 $\alpha_1+2\beta_1$，先选系统可控临界指数为 (α_1,β_1).

第二步　采用线性预反馈，$u=k\xi$ 使得 $\mathrm{Re}(\lambda(A^-))<0$.

第三步　先镇定子系统 $\dot{x}=A^0x+\tilde{f}(x,\pi(x))$ 且要求 $\pi(0)=0,\dfrac{\partial\pi(0)}{\partial x}=0$.

第四步　解方程

$$\frac{\partial\pi}{\partial x}(A^0x+\tilde{f}(x,\pi(x)))=A^-\pi(x)+B\tilde{u}+\tilde{g}(x,\pi(x),\tilde{u}),$$

得

$$\tilde{u}=c(x).$$

如果以上几步都行，则 $u=k\xi+c(x)$ 即为原系统的一个局部镇定律. 否则选择另一个可控临界指数，从第二步开始.

例 2　刚体角速度系统的镇定

系统模型为

$$\dot{x}=yz,$$
$$\dot{y}=u,$$
$$\dot{z}=v.$$

我们按上述步骤进行:

第一步　该系统的可控临界指数集 $\Delta=\{(1,0),(2,0),(1,1),(3,0)\}$. 首先选择可控临界指数为 $(1,0)$.

第二步　令 $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{u}\\\tilde{v}\end{bmatrix}$.

第三步　构造 $\dot{x}=yz$ 的局部镇定律. 这里视 y,z 为控制变量. 该一维系统可局部光滑镇定 $\Leftrightarrow\exists\ y(x),z(x)$ 使得 $\dot{x}=-a_px^{2p}-1+o(x^{2p}-1),a_p>0,p$ 为正整数. 这里我们还要求 $\dfrac{\partial y(0)}{\partial x}=\dfrac{\partial z(0)}{\partial x}=0$. 这里我们可选择

$$y^*=\alpha x^2+o(x^2),\quad z^*=\beta x^3+o(x^3),\quad \alpha\beta<0.$$

第四步　解方程

$$\frac{\partial y^*}{\partial x}y^*z^*=-y^*+\tilde{u},$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial x}y^*z^*=-z^*+\tilde{v}.$$

从而得

$$\tilde{u}=\alpha x^2+o(x^2),\quad \tilde{v}=\beta x^3+o(x^2).$$

原系统的镇定律为

$$u=-y+\alpha x^2+o(x^2),$$
$$v=-z+\beta x^3+o(x^3).$$

α,β 满足 $\alpha\beta<0$. 当然，我们还可以构造其它满足条件的镇定律.

参考文献

[1] Aeyels, D.. Stabilization of a Class of Nonlinear Systems by a Smooth Feedback Control. Syst. & Contr. Lett., 1985, 5:289—294

[2] Brockett, R. W.. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. In Sussman, H. J., Brockett, R. W. and Millman, M. (eds) Differential Geometric Method in Nonlinear Control Theory 1983, 112—121

[3] Byrnes. C. I. and Isidori, A.. Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36, 1122—1137

[4] Carr, J.. Application of Centre Manifold Theory. New York, Springer Verlag, 1981

[5] 吉英存,高为炳.非线性系统局部镇定问题的一般方法及其应用.控制理论与应用年会,山东.1991, 503—506

[6] Boothby, W. M., and Marino, R.. Feedback Stabilization of Planar Nonlinear Systems Ⅱ. 28th IEEE Conf. Deci. and Contr., 1989, 1031—1037

Controlled Centre Manifold and Stabilization of Nonlinear Control Systems

JI Yingcun and GAO Weibing

(The 7th Research Division of Beijing University of Aero. and Astro. • Beijing, 100083, PRC)

Abstract: In this note, we give the definition of controllable critical index for the nonlinear control systems and investigate its role in the stabilization of nonlinear control systems.

Key words: smooth feedback stabilization; controllable critical index; control invariance; centre manifold

本文作者简介

吉英存 1965年生.现为北京航空航天大学在读博士生.主要兴趣是非线性控制,特别是非线性 H_∞ 理论.

高为炳 1925年生.1948年西北工学院航空系毕业.留校任助教,讲师.1952年到北京航空学院任讲师,1956年任副教授.1978年任教授.1991年任中国科学院学部委员.主要兴趣为非线性控制,变结构控制,大系统理论,机器人控制,智能控制以及航空航天飞行器的控制.