第 10 卷第 4 期
1993 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

双线性系统的三角化条件

谢小信 刘晓平 张嗣瀛
(东北工学院自动控制系·沈阳,110006)

摘要:本文给出了双线性系统系数矩阵的李括号条件,在此条件下,可使双线性系统状态三角化.

关键词:双线性系统;李括号;三角化

1 引 言

除了结构复杂这一特征之外,大系统的另一重要特征就是维数较高,这种高维系统不管是在理论分析上还是工程应用上都会遇到很多困难.因此设法使大系统分解为多个独立的子系统或者多个弱相关的子系统是很有意义的.这可使对整个系统的处理简化为对其低维子系统的处理.双线性系统在结构上是介于线性系统与非线性系统之间的一类控制系统,对该类系统结构的处理在很大程度上依赖于对矩阵的处理.本文给出一个双线性系统的系数矩阵及控制矩阵的李括号条件,使得系统在某一线性变换下,系数矩阵和控制矩阵同时变为三角形式.从系统结构的角度看,这是最好的级联分解.

2 李括号条件

引理 2.1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是复数域上的 n 阶方阵,$k \geqslant 2$.如果满足条件

$$[A_i, A_j] = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k, \tag{2.1}$$

则存在一向量 $\xi \in V^n$,它是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的公共特征向量.这里 $[A,B] = AB - BA$ 表示李括号,V^n 是复数域上的 n 维向量空间.

证 先设 $k=2$.令 V_λ 是 A_1 的特征值为 λ 的特征子空间.根据条件(2.1)知 $A_1A_2 = A_2A_1$,现任取 $\xi \in V_\lambda$,则 $A_1A_2\xi = A_2A_1\xi = \lambda(A_2)\xi$.于是 $A_2\xi \in V_\lambda$.故 V_λ 是 A_2 的一个不变子空间,因此,V_λ 中一定存在 A_2 的特征向量,该向量即是 A_1, A_2 的公共特征向量.

当 $k>2$ 时,可由归纳法证明.

引理 2.2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是复数域上的一组 n 阶矩阵,$k \geqslant 2$.如果满足

$$[A_i, A_j] = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k,$$

则存在非奇异矩阵 T,使得 $T^{-1}A_iT(1 \leqslant i \leqslant k)$ 同时为上三角形.

证 根据引理 2.1,令 ξ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的公共特征向量,那么存在非奇异矩阵 T_1,使得

$$T_1^{-1}\xi = e_1 = [1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}.$$

于是

本文于1992年2月28日收到.

$$T_1^{-1}A_iT_1=\begin{bmatrix}a_{i1} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_i' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

其中 A_i' 是 $n-1$ 阶复矩阵，$i=1,2,\cdots,k$. 令 $\widetilde{A}_i=T_1A_iT_1(1\leqslant i\leqslant k)$，不难知道 $[\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j]=0,1\leqslant i,j\leqslant k$，经过简单的运算，可知对于 $A_1',A_2',\cdots,A_k'$，成立

$$[A_i',\ A_j']=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant k.$$

于是存在 $\theta\in V^{n-1}$ 是 $A_1',A_2',\cdots,A_k'$ 的公共特征向量. 这样就存在非奇异矩阵 T_2，使得

$$T_2^{-1}A_i'T_2=\begin{bmatrix}a_{i2} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_i'' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

其中 $\hat{A}_i$ 是 $n-2$ 阶方阵，$i=1,\cdots,k$. 以此下去，直到最后一步. 并取

$$T=T_1\begin{bmatrix}1 & \\ & T_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}I_{n-2} & \\ & T_{n-1}\end{bmatrix},$$

则 $T^{-1}A_iT$ 同为上三角阵$(1\leqslant i\leqslant k)$.

考虑如下的双线性控制系统　$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{m}u_iB_ix.$　(2.2)

其中 $x\in C^n$ 是系统的状态，$A,B_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 均是 n 阶复矩阵，$u_i\in C$ 是系统的控制变量$(i=1,\cdots,m)$. 根据前面的引理，我们有下面的分解定理.

定理 2.1　对于双线性控制系统(2.2)，如果满足条件

$$[A,\ B_i]=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad [B_i,\ B_j]=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,$$

那么存在状态变换 $T: x=Ty$，使得 $\widetilde{A}=T^{-1}AT,\widetilde{B}_i=T^{-1}B_iT(1\leqslant i\leqslant m)$ 均是上三角阵，即

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}a_1 & * & \cdots & * \\ & a_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n\end{bmatrix},\quad \widetilde{B}_i=\begin{bmatrix}b_{i1} & * & \cdots & * \\ & b_{i2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{in}\end{bmatrix}.$$

其中 $i=1,\cdots,m$.

可以看出，在定理条件下，系统可以作三角化分解. 从系统结构的角度看，这是最好的级联分解.

3 扩展的李括号条件

定理 2.1 的条件是一个充分条件. 本节将这一条件给以适当扩展.

定理 3.1　对于双线性控制系统(2.2)，令 $A=B_0$，如果满足条件

$$[B_k,[B_i,\ B_j]]=0,\quad 0\leqslant k,i,j\leqslant m,$$

则存在状态变换 $T: x=Ty$，使得系统在 y 坐标下上三角化. 即 $T^{-1}B_iT$ 为上三角矩阵$(i=0,1,\cdots,m)$.

证　如果$[B_i,\ B_j]=0$ 对于 $i,j=0,1,\cdots,m$ 成立，则条件即变为定理 2.1 的条件. 现不妨设$[B_1,\ B_2]\neq 0$，则由

$$[B_k,[B_1,\ B_2]]=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m$$

知集合$\{B_0,B_1,\cdots,B_m\}$必可约. 因为如果不可约，则由 Schur 定理[2]可得$[B_1,\ B_2]=\lambda I_n$，λ是一个复数，两边取迹，得 $0=n\lambda$，故 $\lambda=0$，从而$[B_1,\ B_2]=0$，与假设矛盾. 因而集合可约，即存在非奇异矩阵 T_1，使得

$$T_1^{-1}B_iT_1=\begin{bmatrix}B_{i1} & B_{i3}\\ 0 & B_{i2}\end{bmatrix},\quad 0\leqslant i\leqslant m.$$

其中 B_{i1}是 r 阶矩阵($0\leqslant r\leqslant m$). 令 $\tilde{B}_i=T_1^{-1}B_iT_1$，不难知道$[\tilde{B}_k,[\tilde{B}_i,\ \tilde{B}_j]]=0$. 经过简单的运算，有

$$[\tilde{B}_k,[\tilde{B}_i,\ \tilde{B}_j]]=\begin{bmatrix}[B_{k1},[B_{i1},\ B_{j1}] & *\\ 0 & [B_{k2},[B_{i2},\ B_{j2}]]\end{bmatrix},$$

从而得$[B_{k1},[B_{i1},\ B_{j1}]=0,\quad 0\leqslant k,i,j\leqslant m;\quad [B_{k2},[B_{i2},\ B_{j2}]]=0,\quad 0\leqslant k,i,j\leqslant m.$

继续下去，由归纳法可知存在 r 阶非奇异矩阵 P_1 及 $n-r$ 阶非奇异矩阵 P_2，使得 $P_1^{-1}B_{i1}P_1$ 及 $P_2^{-1}B_{i2}P_2$ 为上三角阵，$i=0,1,\cdots,m$. 这样可令

$$T=T_1\begin{bmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix},$$

则 T 可满足定理的要求.

从定理 3.1 的证明过程可以看出，对定理 3.1 的条件可以作进一步扩展.

定理 3.2 对于双线性控制系统(2.2)，令 $A=B_0$，如果满足条件

$$[B_r,[\cdots[B_k,[B_i,B_j]]\cdots]]=0,\quad 1\leqslant r,\cdots,k,i,j\leqslant m.$$

则存在状态变换 $T:x=Ty$，使得系统在 y 坐标下上三角化.

参 考 文 献

[1] Hazewinkel, M. and Martin, C.. Symmetric Linear Systems; An Application of Algebraic Systems Theory. Int. J. Contr., 1983, 37(6):1731

[2] Borner, H.. Darstellugen von Gruppen. Berlin, Springer Verlag, 1955, 20—21

[3] Banks, S. P. and Yew, M. K.. On the Optimal Control of Bilinear Systems and Its Relation to Lie Algebra. Int. J. Contr., 1986, 43(3):891—900

The Triangularization Conditions of Bilinear Control Systems

XIE Xiaoxing, LIU Xiaoping and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: Lie bracket conditions of matrices of bilinear control systems are given in the paper. Under these conditions the states of a bilinear system can be triangularized.

Key words: bilinear system; Lie bracket; triangularization

本文作者简介

谢小信 见本刊 1993 年第 2 期第 234 页.

刘晓平 见本刊 1993 年第 2 期第 234 页.

张嗣瀛 见本刊 1993 年第 2 期第 234 页.