第 11 卷第 1 期
1994 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 1
Feb., 1994

线性时变系统的区间稳定性与鲁棒稳定性*

施鼎汉 曾晓军
(厦门大学系统科学系·福建，361005)

摘要：本文应用向量比较定理研究线性时变系统的区间稳定性和具非线性时变摄动的线性时变系统的鲁棒稳定性. 所得的新结果包含文献[4,8,11,15]的一些主要结果作为特例. 本文的研究方法说明向量比较方法是分析区间稳定性和鲁棒稳定性的一种自然而有力的工具.

关键词：区间稳定性；鲁棒稳定性；线性时变系统；非线性摄动；向量比较定理

1 引 言

近十年来国内外对动态系统的区间稳定性和鲁棒稳定性进行了相当多的研究. 从内容上看，最常用的是 Lyapunov 函数法[1~6]，其他方法还有 Gronwall 引理[7,8]，园盘定理[9,10]，分块迭代法[11]，对称矩阵特征值性质[12,13]，矩阵测度和标量比较定理[8,14]. 本文试图应用向量比较定理讨论线性时变系统的区间稳定性和鲁棒稳定性，用较为简便的方法得到适用范围更广的一些新结果. 它们包含文献[4,8,11,15]的某些主要结果作为特例. 我们在本文及最近的其他一些研究表明(如[16])，向量比较方法是分析区间稳定性和鲁棒稳定性的一种自然而有力的工具.

本文所讨论的系统都是实的，并使用如下记号和预备知识：

$\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^{n\times n}$　n 维实线性空间和 $n\times n$ 实矩阵空间；

$(|X|), (|B|)$　由向量 X 和矩阵 B 的元取绝对值所组成的向量和矩阵，

$A\leqslant B$　对 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}, a_{ij}\leqslant b_{ij}(\forall\ i,j)$；

$X\leqslant Y$　对 $X=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n), Y=\mathrm{col}(y_1,\cdots,y_n), x_i\leqslant y_i(i=1,\cdots,n)$；

$\|\cdot\|$　向量的欧氏范数及其所诱导的矩阵范数.

称 $G(t,Y)=\mathrm{col}(g_1(t,Y),\cdots,g_n(t,Y))\in C[I\times \mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n]$ 关于 Y 拟单调不减，如 $\forall\ (t,Y)$，$(t,Y')\in I\times \mathrm{R}^n$，当 $y_i=y_i'$ 而 $y_j\leqslant y_j'(j\neq i, i=1,\cdots,n)$ 时有 $g_i(t,Y)\leqslant g_i(t,Y')(i=1,\cdots,n)$.

向量比较定理([15]定理 10.6)　设 n 维向量函数 $\varphi(t)$ 在 $t_0\leqslant t<\infty$ 上连续，右导数 $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ 满足微分不等式 $\frac{d\varphi(t)}{dt}\leqslant G(t,\varphi(t)), \varphi(t_0)=\xi$，其中 $G(t,Y)$ 关于 Y 拟单调不减，且在含曲线 $Y=\varphi(t)(t_0\leqslant t<b)$ 的某区域 $D\subset I\times \mathrm{R}^n$ 内定义的连续向量函数. 又 $Y=\psi(t)$ 是在 $t_0\leqslant t<b$ 上满足微分方程组 $\frac{dY}{dt}=G(t,Y), Y(t_0)=\xi$ 的最大右行解，则有 $\varphi(t)\leqslant\psi(t), t_0\leqslant t<b$.

2 线性时变区间系统的稳定性

考虑线性时变区间系统

---

* 中国科学院复杂系统控制开放实验室资助项目.
本文于1992年10月28日收到. 1993年8月5日收到修改稿.

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

其中 $X(t)\in \mathrm{R}^n, A(t)\in N[P(t),Q(t)]\triangleq\{A(t)\mid P(t)\leqslant A(t)\leqslant Q(t)\}$是在 $t\geqslant t_0$ 连续的 $n\times n$ 阵. $P(t)=(p_{ij}(t)), Q(t)=(q_{ij}(t))$是已知的 $n\times n$ 阵，在 $t\geqslant t_0$ 连续. 由于 $A(t)$的不确定性，(1)是线性时变区间系统. 如果对$\forall$ $A(t)\in N[P(t),Q(t)]$，(1)的零解都是渐近稳定的，则称区间动态系统(1)稳定，记为 $N[P(t),Q(t)]\subset S$. 记

$$M(t) = (m_{ij}(t))_{n\times n}, \tag{2}$$

$$m_{ii}(t) = q_{ii}(t), \quad m_{ij}(t) = \max\{|p_{ij}(t)|, |q_{ij}(t)|\}, \quad (i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n),$$

$$D_A(t) = \mathrm{diag}[a_{11}(t),\cdots,a_{nn}(t)], \quad D(t) = \mathrm{diag}[m_{11}(t),\cdots,m_{nn}(t)], \tag{3}$$

定理 1　若系统

$$\dot{Z}(t) = M(t)Z(t) \tag{4}$$

的零解渐近稳定，则 $N[P(t),Q(t)]\subset S$.

证　对$\forall$ $A(t)\in N[P(t),Q(t)]$，由(1)及 $A(t)=D_A(t)+(A(t)-D_A(t))$有

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^{t}D_A(\tau)d\tau}X_0 + \int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}D_A(\tau)d\tau}[A(\tau) - D_A(\tau)]X(\tau)d\tau.$$

注意到 $D_A(t)\leqslant D(t)$，$(|A(t)-D_A(t)|)\leqslant M(t)-D(t)$有

$$\begin{aligned}(|X(t)|) &\leqslant e^{\int_{t_0}^{t}D_A(\tau)d\tau}(|X_0|) + \int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}D_A(\xi)d\xi}(|A(\tau) - D_A(\tau)|)(|X(\tau)|)d\tau \\ &\leqslant e^{\int_{t_0}^{t}D(\tau)d\tau}(|X_0|) + \int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}D(\xi)d\xi}[M(\tau) - D(\tau)](|X(\tau)|)d\tau \triangleq Y(t).\end{aligned} \tag{5}$$

显然 $Y(t)$在 $t\geqslant t_0$ 连续可微，且有

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= D(t)Y(t) + [M(t) - D(t)](|X(t)|) \\ &\leqslant D(t)Y(t) + [M(t) - D(t)]Y(t) = M(t)Y(t).\end{aligned} \tag{6}$$

又因为 $G(t,Y)\triangleq M(t)Y(t)$关于 Y 拟单调不减，由向量比较定理(对照系统(4)，(6))知

$$Y(t) \leqslant Z(t). \tag{7}$$

其中 $Z(t)$是方程(4)以 $Z(t_0)=(|X_0|)$为初值的唯一解. 综合(5)，(7)得$(|X(t)|)\leqslant Y(t)\leqslant Z(t)$，从而由(4)的零解渐近稳定推出任意 $A(t)\in N[P(t),Q(t)]$，(1)的零解渐近稳定.

注 1　当 $P(t)\equiv P, Q(t)\equiv Q$，此时由式(2)定义的 $M(t)\equiv M$ 也为常阵. 由定理 1 得知如 $\dot{Z}(t)=MZ(t)$的零解渐近稳定. 则 i) $N(P,Q)\subset S$; ii) $N_0(P,Q)=\{A(t)\mid P\leqslant A(t)\leqslant Q\}\subset S$. i)是文[4]的主要结论，可见定理 1 推广了文[4]. 特别是结论 ii)说明如系统的时变不确定因素或扰动变化的上下界可由适当的常数阵表示，则只需判别一个定常阵 M 为 Hurwitz 阵(由于 M 的非对角元皆非负，只要判别-M 是 M 矩阵)，就可断定系统在时变扰动下的稳定性性质.

注 2　[15]的定理 12.7 用迭代估值法得到定常区间系统(1)稳定的充分条件. 基于定理 1，对系统(4)应用我们在[16]中所使用的最大值解的估计技巧可得到相同的结论，而方法却简单得多.

对一类特殊的系统，定理 1 的充分条件也是必要的.

定理 2　若对 $t\geqslant t_0$ 有 $p_{ij}(t)+q_{ij}(t)\geqslant 0(i\neq j, i,j=1,\cdots,n)$，则 $N[P(t),Q(t)]\subset S$ 的充要条件是系统(4)的零解渐近稳定.

证 只要证明在假设下有 $M(t)=Q(t)$ 就可立得定理 2 结论. 由 $p_{ij}(t)+q_{ij}(t)\geqslant 0(i\neq j)$ 及 $p_{ij}(t)\leqslant q_{ij}(t)$ 推知

$$q_{ij}(t)\geqslant -p_{ij}(t),\quad q_{ij}(t)\geqslant 0,\quad (i\neq j).$$

如 $p_{ij}(t)\leqslant 0$, 则 $q_{ij}(t)\geqslant -p_{ij}(t)=|p_{ij}(t)|$; 如 $p_{ij}(t)\geqslant 0$, 则 $0\leqslant p_{ij}(t)\leqslant q_{ij}(t)$. 这两种情况均有 $m_{ij}(t)=q_{ij}(t)(i\neq j)$. 由定义 $M(t)=Q(t)$.

注 3 对于区间系统(1)为定常时,[11]及[15]的定理 12.8 用繁杂的迭代估值法分别证明了如果 $q_{ij}=-p_{ij}$ 及 $p_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$, 则 $N'(P,Q)\subset S$ 的充要条件为 Q 是 Hurwitz 阵. 显然这两种情况是定理 2 的特例,定理 2 不仅适用范围广,而且基于定理 1 的证明方法也简单得多.

3 具非线性摄动的线性时变系统的鲁棒稳定性

考虑具有非线性摄动的线性时变系统

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+F(t,X(t)),\quad X(t_0)=X_0. \tag{8}$$

其中 $X(t)\in \mathrm{R}^n$, $A(t)=(a_{ij}(t))$ 是 $t\geqslant t_0$ 上连续的 $n\times n$ 阵,它表示标称系统阵. $F(t,X)\in C[[t_0,\infty)\times \mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n]$ 表示系统的非线性摄动:

$$F(t,X)\in H\triangleq\{F(t,X)\,|\,(|F(t,X)|\leqslant B(t)(|X|)\}, \tag{9}$$

这里 $B(t)$ 是 $t\geqslant t_0$ 上非负的 $n\times n$ 连续矩阵.

以下考虑的鲁棒稳定性问题是:在什么条件下对一切 $F(t,X)\in H$, 系统(8)的零解渐近稳定. 以 $A_0(t)$ 表示对角元为 0, 非对角 (i,j) 元为 $|a_{ij}(t)|$ 的 $n\times n$ 阵. 记

$$J_A(t)=\mathrm{diag}(a_{11}(t),a_{22}(t),\cdots,a_{nn}(t)),\quad \overline{A}(t)=J_A(t)+A_0(t). \tag{10}$$

定理 3 若系统

$$\dot{Z}(t)=(\overline{A}(t)+B(t))Z(t) \tag{11}$$

的零解渐近稳定,则对一切 $F(t,X)\in H$, 系统(8)的零解渐近稳定.

证 对$\forall$ $F(t,X)\in H$, 方程(8)的解满足

$$X(t)=e^{\int_{t_0}^t J_A(\tau)\mathrm{d}\tau}X_0+\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t J_A(\xi)\mathrm{d}\xi}[A(\tau)-J_A(\tau)]X(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t J_A(\tau)\mathrm{d}\tau}F(\tau,X(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

注意到(9),及 $(|A(\tau)-J_A(\tau)|)=A_0(\tau)$, 类似定理 1 的证明有

$$\begin{aligned}(|X(t)|)&\leqslant e^{\int_{t_0}^t J_A(\tau)\mathrm{d}\tau}(|X_0|)+\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t J_A(\xi)\mathrm{d}\xi}(A_0(\tau)+B(\tau))(|X(\tau)|)\mathrm{d}\tau\\ &\triangleq Y(t).\end{aligned} \tag{12}$$

显然 $Y(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 连续可微,且有

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t)&=J_A(t)Y(t)+[A_0(t)+B(t)](|X(t)|)\\ &\leqslant J_A(t)Y(t)+[A_0(t)+B(t)]Y(t)\\ &=(\overline{A}(t)+B(t))Y(t).\end{aligned} \tag{13}$$

由于 $G(t,Y)\triangleq(\overline{A}(t)+B(t))Y(t)$ 关于 Y 拟单调不减,由向量比较定理(对照(11)与微分不等式(13))有

$$Y(t)\leqslant Z(t), \tag{14}$$

这里 $Z(t)$ 是方程(11)以 $Z(t_0)=(|X_0|)$ 为初始条件的解. 由(12),(14)知定理得证.

研究时变系统(11)的稳定性条件即可建立系统(8)鲁棒稳定的充分条件. 对一类特殊

的系统，上述充分条件也是必要的.

定理 4 若对 $t\geqslant t_0$ 有 $a_{ij}(t)\geqslant 0(i\neq j,i,j=1,\cdots,n)$，，则对一切 $F(t,X)\in H$，系统(8)的零解渐近稳定的充要条件是系统(11)的零解渐近稳定.

证 设对一切 $F(t,X)\in H$，系统(8)的零解渐近稳定，特别取 $F(t,X)=B(t)X$，则系统 $\dot{X}(t)=(A(t)+B(t))X(t)$ 的零解渐近稳定. 注意到 $a_{ij}(t)\geqslant 0(i\neq j)$ 有 $A(t)=\overline{A}(t)$，故必要性得证.

当 $A(t)\equiv A=(a_{ij})$ 时，$\overline{A}(t)\equiv\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$，按式(10)有 $\bar{a}_{ii}=a_{ii},\bar{a}_{ij}=|a_{ij}|(i\neq j)$，由定理 3 知如系统

$$\dot{Z}(t)=(\overline{A}+B(t))Z(t) \tag{15}$$

零解渐近稳定，则对一切 $F(t,X)\in H$ 系统(8)的零解渐近稳定. 这成为定常系统具时变扰动时鲁棒稳定的判别法. 然而(15)渐近稳定的必要条件是 $a_{ii}<0(i=1,\cdots,n)$. 事实上取 $Z_0=e_i$ 为第 i 个座标为 1 的单位向量，由(15)

$$\begin{aligned}Z(t)&=e^{J_A(t-t_0)}Z_0+\int_{t_0}^{t}e^{J_A(t-\tau)}(A_0+B(\tau))Z(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\geqslant e^{J_A(t-t_0)}Z_0\\&=(0,\cdots,0,e^{a_{ii}(t-t_0)},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

如 $a_{ii}\geqslant 0$，则(15)零解不渐近稳定. 这个必要条件是个较强的限制，以下将利用相似变换去掉这一限制. 设 T 为把 A 化为若当标准型 J 的非奇异阵：$T^{-1}AT=J$. 以 $\mathrm{Re}J$ 表示 J 的每一元取实部所得的矩阵；Λ 为 J 的对角元所构成的矩阵；$(|T|)$表示 T 的每一元素取模所组成的矩阵.

定理 5 设 $A(t)\equiv A$ 且 $T^{-1}AT=J$ 为若当标准型. 若

$$\dot{Z}(t)=[\mathrm{Re}J+(|T^{-1}|)B(t)(|T|)]Z(t) \tag{16}$$

的零解渐近稳定，则对一切 $F(t,X)\in H$ 系统(8)的零解渐近稳定.

证 作变换 $X(t)=T\overline{X}(t)$，由(8)

$$\dot{\overline{X}}(t)=J\overline{X}(t)+T^{-1}F(t,T\overline{X}(t)).$$

由此

$$\overline{X}(t)=e^{\Lambda(t-t_0)}\overline{X}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\Lambda(t-\tau)}[(J-\Lambda)\overline{X}(t)+T^{-1}F(\tau,T\overline{X}(t))]\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}(|\overline{X}(t)|)&\leqslant(|e^{\Lambda(t-t_0)}|)(|\overline{X}_0)|+\int_{t_0}^{t}(|e^{\Lambda(t-\tau)}|)[(|J-\Lambda|)\\&\quad+(|T^{-1}|)B(\tau)(|T|)](|\overline{X}(\tau)|)\mathrm{d}\tau,\\&\leqslant e^{\mathrm{Re}\Lambda(t-t_0)}(|\overline{X}_0)|+\int_{t_0}^{t}e^{\mathrm{Re}\Lambda(t-\tau)})[(|J-\Lambda|)+(|T^{-1}|)B(\tau)(|T|)](|\overline{X}(t)|)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

类似于定理 1，由向量比较定理可证得$(|\overline{X}(t)|)\leqslant Z(t)$，这里 $Z(t)$是方程

$$\dot{Z}(t)=[\mathrm{Re}\Lambda+(|J-\Lambda|)+(|T^{-1}|)B(\tau)(|T|)]Z(t),\quad Z(t_0)=(|\overline{X}_0|)$$

的唯一解. 注意到 $\mathrm{Re}\Lambda+(|J-\Lambda|)=\mathrm{Re}J$，及上述方程即为方程(16). 对于方程(8)的解 $X(t)$有

$$(|X(t)|)=(|T\overline{X}(t)|)\leqslant(|T|)(|\overline{X}(t)|)\leqslant(|T|)Z(t),$$

因而(16)的零解渐近稳定保证(8)的零解渐近稳定.

注 4 文[8]证明了当 $T^{-1}AT=J=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 时若

$$\alpha=-\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathrm{Re}\lambda_i)>\|(|T^{-1}|)B(|T|)\|, \tag{17}$$

则系统 $\dot{X}(t)=(A+E(t))X(t)$ 的零解对一切 $E(t)\in H_0=\{E(t)\,|\,(|E(t)|)\leqslant B\}$ 渐近稳定. 现证如(17)成立,则(16)零解渐近稳定. 由(16)有

$$Z(t)=e^{\mathrm{Re}J(t-t_0)}Z_0+\int_{t_0}^{t}e^{\mathrm{Re}J(t-\tau)}|)(|T^{-1}|)B(|T|)Z(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\|Z(t)\|\leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}\|Z_0\|+\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-\tau)}\|(|T^{-1}|)B(|T|)\|\cdot\|Z(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

即

$$\|Z(t)\|e^{\alpha(t-t_0)}\leqslant\|Z_0\|+\int_{t_0}^{t}\|(|T^{-1}|)B(|T|)\|e^{-\alpha(t-t_0)}\|Z(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

于是由 Gronwall 引理有

$$\|Z(t)\|\leqslant\|Z_0\|\exp\{(-\alpha+\|(|T^{-1}|)B(|T|)\|)(t-t_0)\}.$$

由(17)即知系统(16)渐近稳定. 因而定理 5 推广了[8]的上述主要结果,去掉了要求 J 为对角形条件.

4 结束语

本文应用向量比较方法研究了线性时变系统的区间稳定性和鲁棒稳定性. 所得新结果包含了文献[4,8,11,15]的一些结果作为特例. 这种方法也可用于分析时变大系统的鲁棒稳定性,研究鲁棒控制器的设计等. 本文和最近作者的其他研究结果(如[16])说明,这种方法保持了 Lyapunov 方法适合于时变甚至非线性扰动的稳定性分析的优点,而且还可包含用园盘定理,Gronwall 引理,迭代估值法,矩阵测度等作鲁棒性分析的结果,使处理问题观点统一,又直接简明. 总之,向量比较法是研究区间稳定性和鲁棒稳定性的一种自然而有力的工具.

参考文献

[1] Patel, R. V. and Tods, M.. Quantitative Measures of Robustness For a Multi-Variable System. Proc. JACC, San Franciscs, Tp8-A, 1980

[2] Yedavalli, R. K.. Perturbation Bounds for Robust Stability in Linear State Space Model. Int. J. Contr., 1985, 42(6): 1507—1517

[3] Yedavalli, R. K. and Liang, A.. Reduced Conservation in Stability Robustness Bounds By State Transformation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(9):863—866

[4] Xu, D.. Simple Criteria for Stability of Interval Matrices. Int. J. Contr., 1985, 41(1):289—295

[5] Zhou, K. M. and Khargonekar, P. P.. Stability Robustness Bounds for Linear State Space Models with Structured Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(7):621—623

[6] Abdul-Wahab, A. A. A.. Perturbation Bound for Root-Clustering of Linear Continuous-Time Systems. Int. J. System Science, 1991, 22(5):921—930

[7] Chen, B. S. and Wong, C. C.. Robust Linear Controller Design:Time Domain Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(2):161—164

[8] Sobel, K. M. et al. Robust Control of Linear Systems with Structured State Space Uncertainty. Int. J. Control, 1989, 50

(5):1991—2004
[9] Heinen, J. A.. Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices. Int. J. Contr., 1984, 39(6):1323—1328
[10] Juang, Y. T. and Shao, C. S.. Stability Analysis of Dynamic Interval Systems. Int. J. Contr., 1989, 49(4):1401—1408
[11] Liao, X. X.. Necessary and Sufficient Conditions for a Class of Interval Matrices. Int. J. Contr., 1987, 45(1):211—214
[12] Jiang, C. L.. Sufficient Condition for the Asymptotical Stability of Interval Matrices. Int. J. Contr., 1987, 46(5):1803—1810
[13] Jiang, C. L.. Another Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices. Int. J. Contr., 1988, 47(1):181—186
[14] Wang, W. J. and Lee, T. T.. Robust Stability Cirteria for Single and Large Scale Pertured Systems. Int. J. System Science, 1988, 19(3):405—413
[15] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用,武汉:华中师范大学出版社,1988
[16] 施鼎汉,曾晓军. 迭代法分析稳定性的改进. 厦门大学学报,1993, 32(3):267—271

Interval Stability and Robust Stability for Linear Time-Varying Systems

SHI Dinghan and ZENG Xiaojun

(Department of Systems Science, Xiamen University · Fujian Xiamen, 361005, PRC)

Abstract: In terms of vector comparison theorem, interval stability and robust stability for linear time-varying systems with non-linear disturbance are considered. The new results obtained in this paper include the main results in [4,8,11,15]. It is shown that the vector comparison technique is a natural and powerful tool for the analysis of interval and robust stability.

Key words: interval stability; robust stability; linear time-varying systems; non-linear disturbance; vector comparison theorem

本文作者简介

施鼎汉 1940 年生. 1963 年毕业于厦门大学数学系. 留校任教. 1982 年至 1984 年在美国纽约理工大学电气工程系作访问学者. 1986 年为厦门大学计算机与系统科学系副教授. 现为系统科学系系主任. 主要研究兴趣为随机系统, 鲁棒控制, 控制理论在经济与社会领域中的应用等.

曾晓军 1960 年生. 1981 年毕业于厦门大学控制理论专业. 1984 年获该校运筹学与控制论专业硕士学位. 现为厦门大学系统科学系副教授. 目前公派英国曼彻斯特 UMIST 做研究工作. 研究兴趣为微分对策, 鲁棒控制, 控制理论在经济领域中的应用等.