第 11 卷第 1 期
1994 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 1
Feb., 1994

# 多项式族左扇区稳定的最大摄动区间

赵克友　　　　郭　磊　黄晓鸣
(青岛大学电气工程系·山东,266071)　(青岛大学应用数学系·山东,266071)

**摘要**：已知多项式 $p(s,r)=\sum_{i=0}^{n}a_i(r)s^i$. 其中诸系数 $a_i(r)(i=0,1,\cdots,n)$ 为参量 $r$ 的多项式函数且 $p(s,0)$ 是左扇区稳定的多项式. 本文给出 $r$ 的最大摄动区间以使对这区间中的所有 $r$，多项式 $p(s,r)$ 都是左扇区稳定的.

**关键词**：多项式族；鲁棒性；稳定性

## 1 引　言

当对控制系统动态阻尼比特性有所要求时，常规定稳定性区域为复平面 $C$ 上的"左扇区"$D_\varphi$：

$$D_\varphi=\{S\in \mathrm{C}\mid \varphi<\arg\{s\}<2\pi-\varphi,\quad \varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi)\},$$

对于线性定常连续时间系统而言，系统的稳定性等价于其特征多项式的稳定性. 如果一个给定的多项式 $f(s)$ 满足 $\{s\in\mathrm{C}\mid f(s)=0\}\subset D_\varphi$，则称 $f(s)$ 是 $D_\varphi$ 稳定的多项式，简记为 $f(s)\in\mathscr{H}_\varphi$，这里 $\mathscr{H}_\varphi$ 表示 $D_\varphi$ 稳定的多项式全体. 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，将 $\mathscr{H}_{\frac{\pi}{2}}$ 记为 $\mathscr{H}$，则 $\mathscr{H}$ 表示 Hurwitz 稳定多项式的全体.

给定连续依赖于摄动量 $r\in\mathrm{R}$ 的 $n$ 阶实系数多项式

$$p(s,r)=a_0(r)+a_1(r)s+\cdots+a_n(r)s^n,\tag{1}$$

设它的标称多项式 $p(s,0)$ 满足

A1) $a_n(0)>0$,

A2) $p(s,0)\in\mathscr{H}_\varphi$.

$p(s,r)$ 对 $r$ 是连续依赖的，必存在实数 $r^-<0$ 与 $r^+>0$ 使对 $\forall\ r\in(r^-,r^+)$ 有

B1) $p(s,r)$ 不降低阶数，即 $a_n(r)>0$；

B2) $p(s,r)$ 保持 $D_\varphi$ 稳定，即 $p(s,r)\in\mathscr{H}_\varphi$.

记满足上述两条所有 $r^-$ 的下确界为 $r_{\min}$，满足上述两条的 $r^+$ 的全体的上确界为 $r_{\max}$，显然 $(r_{\min},r_{\max})$ 即为 $p(s,r)$ 在前提 A1) 与 A2) 下具备性质 B1) 与 B2) 的参数 $r$ 的最大摄动区间，对于 $(r_{\min},r_{\max})$ 我们应指出以下几点：

1) $r=0$ 是它的内点，但未必是对称中心点.

2) 不排除 $r_{\min}$ 或 $r_{\max}$ 可能是 $-\infty$ 与 $+\infty$ 的情况.

3) 若它的某一端点是有限数，则在此点要么 $a_n(r)=0$，要么 $p(s,r)\bar{\in}\mathscr{H}_\varphi$.

本文于1992年7月2日收到. 1993年2月9日收到修改稿.

4) $r_{\min}$越小，$r_{\max}$越大，族(1)的 $D_\varphi$ 稳定鲁棒性就越好.

当 $a_i(r)$是 $r$ 的一般非线性连续函数时，文[1]提出了 $r_{\min}$与 $r_{\max}$的优化计算方法，所得结果依赖于算法收敛性及步长选取等因素. 当 $a_i(r)$是 $r$ 的仿射线性函数且稳定性区域为开右半复平面时，文[2]给出了求 $r_{\min}$与 $r_{\max}$的直接公式. 本文假设 $p(s,r)$中的诸系数$a_i(r)$，$i=0,1,\cdots,n$ 是参数 $r$ 的多项式函数，即

$$a_i(r) = a_{0i} + a_{1i}r + a_{2i}r^2 + \cdots + a_{mi}r^m. \tag{2}$$

其中 $a_{ki}, k=0,1,\cdots m;\ i=0,1,\cdots,n$ 为给定实数. 上述假设是有实际工程背景的，因为系统开环传递函数的分子与分母常为一些一阶与二阶因子的乘积，若这些因子的系数线性地依赖于参量 $r$，则所得闭环特征多项式的诸系数必是 $r$ 的多项式函数.

将(2)代入(1)，按 $r$ 的幂次合并同类项可得

$$p(s,r) = p_0(s) + rp_1(s) + r^2p_2(s) + \cdots + r^mp_m(s). \tag{3}$$

其中 $p_k(s)=a_{k0}+a_{k1}s+\cdots+a_{kn}s^n, k=0,1,\cdots,m$. 此时易知 $p_0(s)=p(s,0)$，而 $a_n(0)=a_{0n}>0$. 又由 $p_0(s)\in\mathscr{H}_\varphi$ 知 $p_0(s)$的诸系数必为正，于是先前的假设 A1)，A2)可替换为

A′1) $p_0(s)$的诸系数 $a_{0i}>0,\ i=0,1,\cdots,n$;

A′2) $p_0(s)\in\mathscr{H}_\varphi$.

还可以从另一角度看待(3)式. 若将 $p_k(s), k=1,2,\cdots,m$ 视为 $p_0(s)$的 $m$ 个“摄动方向”，则 $p(s,r)$是 $p_0(s)$沿这些方向的 $m$ 方组合. 当 $m=1$ 时，简称 $p(s,r)$为 $p_0(s)$的“单向摄动”(见文[2]). 本文欲解决的问题是.

**问题 1**　设 $p_0(s)$满足 A′1)与 A′2)，求使 $p(s,r)$满足 1) $a_n(r)\neq 0$; 2) $p(s,r)\in\mathscr{H}_\varphi$ 的 $r$ 的最大摄动区间$(r_{\min}, r_{\max})$.

## 2　预备知识

对于多项式

$$a(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n = a_n\prod_{i=1}^{n}(s-s_i),\quad a_n\neq 0,$$

$$b(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m = b_m\prod_{i=1}^{m}(s-t_k),\quad b_m\neq 0,$$

构造它们的 Sylvester 结式矩阵

$$S[a,b] = \left[\begin{array}{cccccccc} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 & & & \\ & a_n & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & \cdots & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & b_m & b_{m-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}m\text{ 行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}n\text{ 行}\end{array}, \tag{4}$$

则 $S[a,b]$与 $a(s), b(s)$的零点之间有如下关系[3]:

$$|S[a,b]| = a_n^m b_m^n \prod_{i,k=1}^{i=n,k=m}(s_i - t_k).$$

此时$|\cdot|$表行列式，由上述公式即得

**引理 2.1**[3] 多项式 $a(s)$ 与 $b(s)$ 在复域 C 上有公共根当且仅当 $S[a,b]$ 是奇异的 $m+n$ 阶方阵.

$D_\varphi$ 的上半边界可表为 $\rho e^{j\varphi}$, $\rho\in[0,+\infty)$. 对于多项式族

$$\mathscr{P}:=\{p(s,r)\,|\,r\in\Lambda,\quad p(s,r)\text{ 如(3) 式}\}$$

其中 $\Lambda$ 是实域 R 的开区间,定义 $\mathscr{P}$ 的值集为

$$\mathscr{V}(\rho):=\{p(\rho e^{j\varphi},r)\,|\,p(s,r)\in\mathscr{P}\},\quad \rho\in[0,+\infty).$$

由假设 $p_0(s)\in\mathscr{H}_\varphi$,运用鲁棒分析中的值集排零原理[4]可得

**引理 2.2** 对 $\forall\ r\in\Lambda$, $p(s,r)\in\mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当: 1) 对 $\forall\ r\in\Lambda$,有 $a_n(r)\neq0$; 2) 对 $\forall\ \rho\in[0,+\infty)$, $O\overline{\in}\mathscr{V}(\rho)$.

对于任意的 $n$ 阶实系数多项式 $f(s)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_is^i$, $c_n\neq0$,代入 $s=\rho e^{j\varphi}$ 后可得

$$\mathrm{Re}\{f(\rho e^{j\varphi})\}=c_0+(c_1\cos\varphi)\rho+(c_2\cos2\varphi)\rho^2+\cdots+(c_n\cos n\varphi)\rho^n,$$
$$\mathrm{Im}\{f(\rho e^{j\varphi})\}=0+(c_1\sin\varphi)\rho+(c_2\sin2\varphi)\rho^2+\cdots+(c_n\sin n\varphi)\rho^n.$$

若将 $\mathrm{Re}\{f(\rho e^{j\varphi})\}$ 与 $\mathrm{Im}\{(\rho e^{j\varphi})\}$ 形式地看作变元 $\rho$ 的两个多项式,则按(4)式可写出它们的结式矩阵,注意这个结式矩阵的维数与角度 $\varphi$ 有关,它应是 $\mathrm{Re}\{f(\rho e^{j\varphi})\}$ 与 $\mathrm{Im}\{(\rho e^{j\varphi})\}$ 的最高非零项阶次之和,为简单起见,称它为 $f(s)$ 的结式矩阵.

若令

$$\begin{aligned}l_1&=\max\{k\,|\cos k\varphi\neq0,\quad k=0,1,\cdots,n\},\\ l_2&=\max\{k\,|\sin k\varphi\neq0,\quad k=0,1,\cdots,n\},\end{aligned}\tag{5}$$

则(3)式定义的 $p(s,r)$ 的结式矩阵应为下面的 $l_1+l_2$ 阶方阵 $S(r)$((6)式);同样可知(3)式中的诸 $p_k(s)$ 的结式矩阵为 $S_k$ 如(7)式.

$$S_1(r):=\left(\begin{array}{cccccccc}
a_{l_1}(r)\cos l_1\varphi & a_{l_1-1}(r)\cos(l_1-1)\varphi & \cdots & \cdots & a_0(r) & & & \\
 & a_{l_1}(r)\cos l_1\varphi & \cdots & \cdots & a_1(r)\cos\varphi & a_0(r) & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & a_{l_1}(r)\cos l_1\varphi & \cdots & \cdots & & a_1(r)\cos\varphi & a_0(r) \\
a_{l_2}(r)\sin l_2\varphi & a_{l_2-1}(r)\sin(l_2-1)\varphi & \cdots & \cdots & a_1(r)\sin\varphi & & & \\
 & a_{l_2}(r)\sin l_2\varphi & \cdots & \cdots & a_2(r)\sin2\varphi & a_1(r)\sin\varphi & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & a_{l_2}(r)\sin l_2\varphi & \cdots & \cdots & & a_2(r)\sin2\varphi & a_1(r)\sin\varphi
\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}l_2\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}l_1\text{行}\end{array},\tag{6}$$

$$S_k:=\left(\begin{array}{cccccccc}
a_{k,l_1}\cos l_1\varphi & a_{k,l_1-1}\cos(l_1-1)\varphi & \cdots & \cdots & a_{k,0} & & & \\
 & a_{k,l_1}\cos l_1\varphi & \cdots & \cdots & a_{k,1}\cos\varphi & a_{k,0} & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{k,l_1}\cos l_1\varphi & \cdots & \cdots & a_{k,1}\cos\varphi & a_{k,0} \\
a_{k,l_2}\sin l_2\varphi & a_{k,l_2-1}\sin(l_2-1)\varphi & \cdots & \cdots & a_{k,1}\sin\varphi & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & a_{k,l_2}\sin l_2\varphi & a_{k,l_2-1}\sin(l_2-1)\varphi & & a_{k,1}\sin\varphi &
\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}l_2\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}l_1\text{行}\end{array},\tag{7}$$

由 $l_1$ 与 $l_2$ 的定义式可知,或者 $l_1$ 与 $l_2$ 都等于 $n$,或者它们中的一个为 $n$ 而另一个为 $n-1$. 以下若记 $l=\min\{l_1,l_2\}$,则 $l=n$ 或 $n-1$. 由(3),(6),(7)式易得如下关系

$$S(r) = S_0 + rS_1 + \cdots + r^m S_m \tag{8}$$

应用引理 2.2 可以推导出下面两个重要结论.(其证明见附录).

**引理 2.3**　若(3)式中的 $p(s,r)$ 满足 A′1)与 A′2),且存在 $r^- < 0 < r^+$,使 $\forall\, r \in (r^-, r^+)$,有 $a_n(r) \neq 0$, $a_l(r) \neq 0$,则 $\forall\, r \in (r^-, r^+)$, $p(s,r) \in \mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当 $|S(r)| \neq 0$.

**引理 2.4**　若(3)式中的 $p_0(s)$ 满足 A′1)与 A′2),则其结式矩阵 $S_0$ 满足 $|S_0| \neq 0$.

根据引理 2.3 与 2.4 及结式矩阵 $S(r)$ 的构造,可以将问题 1 等价地转化为

**问题 2**　已知(3)式中的 $p_0(s)$ 满足 A′1)与 A′2).求同时满足 1) $a_n(r) \neq 0$; 2) $a_l(r) \neq 0$; 3) $|S(r)| \neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间$(r_{\min}, r_{\max})$.

进一步将问题 2 分解为如下三个子问题:

**问题 2a**　已知 $a_n(0) = a_{0n} > 0$,求使 $a_n(r) \neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间$(r_1^-, r_1^+)$.

**问题 2b**　已知 $a_l(0) = a_{0l} > 0$,求使 $a_l(r) \neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间$(r_2^-, r_2^+)$.

**问题 2c**　已知 $a_n(0) > 0$, $a_l(0) > 0$ 及 $|S_0| \neq 0$,求使 $|S(r)| \neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间$(r_3^-, r_3^+)$.

当 $l = n$ 时,问题 2b 等价于问题 2a,因而可取消.

## 3　主要结果

令 $\lambda_{\min}^-(\cdot)$, $\lambda_{\max}^+(\cdot)$ 分别表示一个方阵的最大负实特征值和最小正实特征值.若方阵无负实特征值,则令 $\lambda_{\min}^-(\cdot) = 0^-$ 若无正实特征值,则令 $\lambda_{\max}^+(\cdot) = 0^+$.

由于 $a_{0i} > 0$, $i = 0, 1, \cdots, n$,因此下面的 $m \times m$ 阶矩阵有意义.

$$A = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{m-1} \\ -\dfrac{a_{mn}}{a_{0n}} & -\dfrac{a_{m-1,n}}{a_{0n}} \cdots -\dfrac{a_{1n}}{a_{0n}} \end{array}\right], \tag{9a}$$

$$B = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{m-1} \\ -\dfrac{a_{ml}}{a_{0l}} & -\dfrac{a_{m-1,l}}{a_{0l}} \cdots -\dfrac{a_{1l}}{a_{0l}} \end{array}\right]. \tag{9b}$$

由引理 2.4, $|S_0| \neq 0$,故下面的 $m(n+l)$阶方阵有意义

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & I_{(n+l)(m-1)} \\ -S_0^{-1}S_m & -S_0^{-1}S_{m-1} \cdots -S_0^{-1}S_1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中 $0$ 为$(n+l)(m-1) \times (n+l)$阶零阵, $I$ 为$(n+l)(m-1)$阶单位方阵.

下面分别给出问题 2a,2b,2c 的解答.

**定理 3.1**　设 $a_{0n} > 0$,则使 $a_n(r) = a_{0n} + a_{1n}r + \cdots + a_{mn}r^m \neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间为$(r_1^-, r_1^+)$,其端点表达式为

$$r_1^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(A)}, \quad r_1^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(A)}. \tag{11}$$

这里 $A$ 如(9a)式定义.

证　根据行列式的初等变换,有

$$|\lambda I_m - A| = \lambda^m + \frac{a_{1n}}{a_{0n}}\lambda^{m-1} + \cdots + \frac{a_{mn}}{a_{0n}} = \frac{\lambda^m}{a_{0n}}\left(a_{0n} + a_{1n}\frac{1}{\lambda} + \cdots + a_{mn}\frac{1}{\lambda^m}\right).$$

将 $r=\frac{1}{\lambda}$ 代入上式，并由(2)式可知

$$\frac{1}{r^m}a_n(r) = a_{0n}\left|\frac{1}{r}I_m - A\right|.$$

因此当且仅当 $\frac{1}{r}<\lambda_{\min}^-(A)$ 或 $\frac{1}{r}>\lambda_{\max}^+(A)$，亦即 $\frac{1}{\lambda_{\min}^-(A)}<r<\frac{1}{\lambda_{\max}^+(A)}$ 时，有 $a_n(r)\neq 0$. 证毕.

类似地有

**定理 3.2** 设 $a_{0l}>0$，则使 $a_l(r)\neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间为 $(r_2^-, r_2^+)$，其端点表达式为

$$r_2^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(B)}, \quad r_2^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(B)}. \tag{12}$$

这里 $B$ 如(9b)式定义.

下面的定理解决了问题 2c.

**定理 3.3** 设 $|S_0|\neq 0$，则使 $|S(r)|=|S_0+rS_1+\cdots+r^mS^m|\neq 0$ 的 $r$ 的最大摄动区间为 $(r_3^-, r_3^+)$，其端点表达式为

$$r_3^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(\pi)}, \quad r_3^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(\pi)}. \tag{13}$$

其中 $\pi$ 如(10)式定义.

证 由行列式的行变换，可得

$$|\lambda I_{m(n+l)} - \pi| = \lambda^{(m-1)(n+l)}\left|\lambda I_{n+l} + S_0^{-1}S_1 + \frac{1}{\lambda}S_0^{-1}S_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda^{m-1}}S_0^{-1}S_m\right|$$

$$= \lambda^{m(n+l)}|S_0^{-1}|\left|S_0 + \frac{1}{\lambda}S_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda^m}S_m\right|.$$

将 $r=\frac{1}{\lambda}$ 代入上式，并由(8)式可知

$$\frac{1}{r^{m(n+l)}}|S(r)| = |S_0|\left|\frac{1}{r}I_{m(n+l)} - \pi\right|.$$

由此可见，当且仅当 $\frac{1}{r}<\lambda_{\min}^-(\pi)$ 或 $\frac{1}{r}>\lambda_{\max}^+(\pi)$，亦即 $\frac{1}{\lambda_{\min}^-(\pi)}<r<\frac{1}{\lambda_{\max}^+(\pi)}$ 时，有 $|S(r)|\neq 0$. 证毕.

综合定理 3.1～3.3，可得本文问题 2 亦即问题 1 的答案. 证明从略.

**定理 3.4** 设 $p_0(s)$ 满足 A′1)与 A′2)，则使 1) $a_n(r)\neq 0$; 2) $a_l(r)\neq 0$; 3) $p(s,r)\in\mathscr{H}_\varphi$ 的 $r$ 的最大摄动区间为 $(r_{\min}, r_{\max})$，其中

$$r_{\min} = \max\{r_1^-, r_2^-, r_3^-\}, \quad r_{\max} = \min\{r_1^+, r_2^+, r_3^+\}. \tag{14}$$

这里 $r_1^\pm, r_2^\pm, r_3^\pm$ 分别由(11)，(12)，(13)式定义.

定理 3.4 的结论适用于所有的左扇区 $D_\varphi$，$\varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi)$. 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$D_\varphi$ 为开左半平面，对于 $p(s,r)$ 的 Hurwitz 稳定的最大摄动区间这一特殊情形，我们有计算上更为简单的结论.

令

$$H(r)=\begin{bmatrix} a_{n-1}(r) & a_{n-3}(r) & a_{n-5}(r) & \cdots & & \\ a_n(r) & a_{n-2}(r) & a_{n-4}(r) & \cdots & & \\ 0 & a_{n-1}(r) & a_{n-3}(r) & a_{n-5}(r) & \cdots & \\ 0 & a_n(r) & a_{n-2}(r) & a_{n-4}(r) & \cdots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_0(r) \end{bmatrix}, \tag{15a}$$

$$H_k=\begin{bmatrix} a_{k,n-1} & a_{k,n-3} & a_{k,n-5} & \cdots & & \\ a_{k,n} & a_{k,n-2} & a_{k,n-4} & \cdots & & \\ 0 & a_{k,n-1} & a_{k,n-3} & a_{k,n-5} & \cdots & \\ 0 & a_{k,n} & a_{k,n-2} & a_{k,n-4} & \cdots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{k,0} \end{bmatrix}, \tag{15b}$$

$$\tilde{\pi}=\begin{bmatrix} 0 & & I_{n(m-1)} \\ -H_0^{-1}H_m & -H_0^{-1}H_{m-1}\cdots & -H_0^{-1}H_1 \end{bmatrix}. \tag{15c}$$

**定理 3.5** 设 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 且 $p_0(s)$ 满足条件 A′1)与 A′2)，则使 1) $a_n(r)\neq 0$; 2) $p(s,r)\in\mathscr{H}$ 的 $r$ 的最大摄动区间为 $(r_{\min},r_{\max})$，其中

$$r_{\min}=\max\left\{\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(A)},\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(B)},\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(\tilde{\pi})}\right\},$$

$$r_{\max}=\min\left\{\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(A)},\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(B)},\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(\tilde{\pi})}\right\}.$$

此时 $A,B$ 如(9a)，(9b)式定义，$\tilde{\pi}$ 为如(15c)式定义.

证　根据 Orlando 公式[2]，此时 $H(r)$ 与前面的 $S(r)$ 所起作用相同，因而证明可仿照前面的论证，此处略.

## 4 计算步骤

假设给定 $a_{kl}$, $k=0,1,\cdots,m$, $l=0,1,\cdots,n$. 并假设 $p_0(s)$ 满足 A′1)与 A′2)，由定理 3.1～3.4，可得当系数扰动为单参数的多项式函数时，多项式族左扇区稳定的最大摄动区间的直接计算方法，其步骤如下：

1° 输入 $a_{kl}$, $k=0,1,\cdots,m$, $l=0,1,\cdots,n$. 按(7)，(9a)，(9b)及(10)式构造 $A,B,S_i(i=0,1,\cdots,m)$ 与 $\pi$.

2° 求 $A,B$ 的特征值，因而由(11)，(12)式得 $r_1^+,r_1^-,r_2^+$ 与 $r_2^-$.

3° 求 $\pi$ 的特征值，按(13)式求 $r_3^+,r_3^-$.

4°按(14)式求 $(r_{\min},r_{\max})$.

由于我们的算法仅涉及矩阵实特征值，因而任何线性代数软件包都可用，用带有协处理器的微机能够非常迅速地得到计算结果，在附录中我们给出一个算例.

## 参 考 文 献

[1] Vicino, A. et al. Maximal Polytopic Stability Domains in Parameter Space for Uncertain Systems. IEEE Trans. Automat.

Contr., 1991, AC-35(7):835—841

[2] Fu, M. and Barmish, B. R.. Maximal Unidirectional Perburbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices. System & Control Lett., 1988, 11:173—179

[3] Barnett, S.. Polynomials and Linear Control Systems. New York:Marcel-Pekker, 1983

[4] Barmish, B. R.. New Tools for Robustness Analysis. Proc. CDC, Austin, TX. 1988

**附　录**

引理 2.3 的证明.

**充分性**　$\forall r\in(r^-,r^+)$, $a_n(r)\neq 0$, $a_l(r)\neq 0$, 且 $|S(r)|\neq 0$, 故有 $\forall x\in\mathbb{R}$, $p(xe^{j\varphi},r)\neq 0$, 再由引理 2.2 知充分性成立.

**必要性**　$a_n(r)\neq 0$ 与 $a_l(r)\neq 0$ 显然. 下面用反证法证明 $|S(r)|\neq 0$, $\forall r\in(r^-,r^+)$.

若不然. 则存在 $\bar r\in(r^-,r^+)$ 使 $|S(\bar r)|=0$, 由引理 2.1, 下面两个关于变元 $\rho$ 的多项式

$$\mathrm{Re}\{p(\rho e^{j\varphi},\bar r)\} = a_0(\bar r) + (a_1(\bar r)\cos\varphi)\rho + \cdots + (a_{l_1}(\bar r)\cos l_1\varphi)\rho^{l_1},$$

$$\mathrm{Im}\{p(\rho e^{j\varphi},\bar r)\} = (a_1(\bar r)\sin\varphi)\rho + (a_2(\bar r)\sin 2\varphi)\rho^2 + \cdots + (a_{l_2}(\bar r)\sin l_2\varphi)\rho^{l_2}$$

必有公共根 $\bar p=\bar x e^{\pm j\theta}$, 因而 $\bar p(\bar x e^{j(\varphi\pm\theta)},\bar r)=0$. 又因 $p(s,\bar r)\in\mathscr{H}_\varphi$, 故 $\bar x e^{j(\varphi\pm\theta)}$ 都应在左扇区内部, 但这是不可能的. 易证: 若 $\bar x e^{j(\varphi+\theta)}\in D_\varphi$, 则 $\bar x e^{j(\varphi+\theta)}\bar\in D_\varphi$; 反之亦然. 此矛盾说明 $|S(r)|\neq 0$, $\forall r\in(r^-,r^+)$.　　证毕.

**算　例**

$$\begin{aligned}p(s,r) &= (4+2r+0.5r^2)+(6+0.15r^2)s+(4+r+0.2r^2)s^2+(1+0.1r^2)s^3\\ &= \underbrace{(4+6s+4s^2+s^3)}_{p_0(s)}+\underbrace{(2+s^2)}_{p_1(s)}r+\underbrace{(0.5+0.15s+0.2s^2+0.1s^3)}_{p_2(s)}r^2.\end{aligned}$$

其中 $p_0(s)$ 的三个根为 $-1\pm i$, $-2$.

设稳定性区域为 $D_\varphi$, $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. 显然 $p_0(s)$ 满足 A′1) 与 A′2). 易知 $l_1=3$, $l_2=2$ 且

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{p(\rho e^{j\varphi},r)\} &= (4+2r+0.5r^2)+x(6+0.15r^2)\cos\varphi+x^2(4+r+0.2r^2)\cos 2\varphi\\ &\quad + x^3(1+0.1r^2)\cos 3\varphi\end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}\{p(\rho e^{j\varphi},\bar r)\} = x(6+0.15r^2)\sin\varphi + x^2(4+r+0.2r^2)\sin 2\varphi$$

由于 $l_1+l_2=5$, 故 $S_k(k=0,1,2)$ 为 5 阶方阵((7)式)

$$S_0=\begin{pmatrix}\cos3\varphi & 4\cos2\varphi & 6\cos\varphi & 4 & 0\\ 0 & \cos3\varphi & 4\cos2\varphi & 6\cos\varphi & 4\\ 4\sin2\varphi & 6\sin\varphi & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\sin2\varphi & 6\sin\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\sin2\varphi & 6\sin\varphi & 0\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}0 & \cos2\varphi & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \cos2\varphi & 0 & 0\\ \sin2\varphi & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin2\varphi & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin2\varphi & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$S_2=\begin{pmatrix}0.1\cos3\varphi & 0.2\cos2\varphi & 0.15\cos\varphi & 0.5 & 0\\ 0 & 0.1\cos3\varphi & 0.2\cos2\varphi & 0.15\cos\varphi & 0.5\\ 0.2\sin2\varphi & 0.15\sin\varphi & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2\sin2\varphi & 0.15\sin\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\sin2\varphi & 0.15\sin\varphi & 0\end{pmatrix},\quad \varphi=\frac{2}{3}\pi.$$

由(10)式可构造 10 阶方阵 $\pi$

$$\pi=\begin{pmatrix}0 & I\\ -S_0^{-1}S_2 & -S_0^{-1}S_1\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\
0.0538 & -0.1154 & 0.1385 & 0.8308 & -0.0000 & -0.7692 & -1.1538 & 1.3846 & 4.1538 & 0.0000 \\
0.0692 & -0.1019 & 0.0923 & 0.5538 & -0.0000 & -0.3462 & -0.7692 & 0.9231 & 2.7692 & 0.0000 \\
0.0462 & -0.0349 & 0.0365 & 0.3692 & -0.0000 & -0.2308 & -0.3462 & 0.6154 & 1.8462 & 0.0000 \\
0.0308 & -0.0231 & 0.0577 & 0.2212 & -0.0000 & -0.1538 & -0.2308 & 0.5769 & 1.2308 & 0.0000 \\
0.0288 & -0.0341 & 0.0635 & 0.2308 & -0.1250 & -0.1442 & -0.1538 & 0.6346 & 1.1538 & 0.5000
\end{pmatrix}.
$$

$\pi$ 的特征值为 1.4885，$-0.7213$，$-0.2500\pm 0.2500i$，$-0.0714\pm 0.2300i$，$-0.0940\pm 0.0770i$，$-0.0643\pm 0.1783i$. 由(13)式，$r_3^-=[\lambda_{\min}^-(\pi)]^{-1}=-1.3864$，$r_3^+=[\lambda_{\max}^+(\pi)]^{-1}=0.6718$. 又本例中 $a_2(r)=4+r+0.2r^2$，$a_3(r)=1+0.1r^2$. 故易于验证 $r_1^-=r_2^-=-\infty$，$r_1^+=r_2^+=+\infty$，因此 $r_{\min}=-1.3864$，$r_{\max}=0.6718$，即使得 $p(s,r)$ 保持 $D_\varphi$ 稳定性的参数 $r$ 的最大的摄动区间为$(-1.3864,\ 0.6718)$. 而且当 $r=-1.3864$ 时，$p(s,r)$ 有根 $-1.0487\pm 1.8165i$ 位于 $D_\varphi$ 的边界上；当 $r=0.6718$ 时，$p(s,r)$ 有根 $-0.6371\pm 1.1035i$ 也位于 $D_\varphi$ 的边界上. 因此所求区间的最大性得到验证.

# Maximal Perturbation Interval for the Left-Sector Stability of Polynomials

ZHAO Keyou
(Department of Electrical Engineering, Qingdao University • Qingdao, 266071, PRC)
GUO Lei and HUANG Xiaoming
(Department of Applied Mathematics, Qingdao University • Qingdao, 266071, PRC)

**Abstract**: Given polynomials $p(s,r)=\sum_{i=0}^{n}a_i(r)s^i$ whose coefficients $a_i(r)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ are polynomial functions of a real variable $r$, also suppose that $p(s,0)$ is $D_\varphi$-stable where $D_\varphi\triangleq\{s\in C\mid\varphi<\arg\{s\}<2\pi-\varphi\}$, $\varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi)$, called the left-sector. This paper gives the maximal perturbation interval $(r_{\min},r_{\max})$ of variable $r$ so that the polynomials $p(s,r)$ are $D_\varphi$-stable for all $(r_{\min},r_{\max})$.

**Key words**: polynomials; robustness; stability

## 本文作者简介

**赵克友** 1945 年生. 1968 年毕业于山东大学数学系，后从事电气产品的研制及电站与电网的设计、维护与管理等技术工作. 自 1978 年来先后任教于山东大学控制论专业、青岛大学应用数学专业及电气技术专业. 现为青岛大学电气工程系副教授. 在此期间曾赴美国有关大学访问进修. 感兴趣于系统控制，微机应用，电气技术及应用数学. 近期研究方向为鲁棒控制及 $H_\infty$ 优化理论，分布式计算机控制与管理系统.

**郭磊** 1966 年生. 1991 年于曲阜师范大学获运筹学与控制论专业硕士学位. 现为青岛大学应用数学系教师. 目前的研究兴趣为系统的稳定性理论与鲁棒性理论.

**黄晓鸣** 1962 年生. 讲师. 1983 年新疆大学数学系毕业，后留校任教. 1988 年于中科院成都分院数理科学研究所获理学硕士学位，专业方向为系统工程. 1988 年至今在青岛大学应用数学系任教. 主要兴趣是计算机软件开发，信息系统工程及控制理论.