第 11 卷第 2 期
1994 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 2
Apr., 1994

采用奇异值分解设计广义系统的最优滤波器

秦超英 戴冠中
(西北工业大学一系·西安, 710072)

摘要：本文讨论广义离散随机线性系统的状态估计问题. 通过矩阵奇异值分解，本文给出了一种设计降阶最优滤波器的实用方法，该方法同时还得到了动态系统和量测系统的干扰噪声的估计.

关键词：广义离散系统；奇异值分解；最优滤波器

1 引 言

由于广义系统描述的实际问题比正常系统更加广泛，因而受到人们极大的关注. 目前，在广义系统的结构性质分析(如能控性、能观性、稳定性、结构稳定性等)和系统的设计方法(如状态反馈、极点配置、观测器、动态补偿器等)方面均已取得了许多成果. 但对广义系统的状态估计问题只是进行了初步探讨，已获得的估计方法在应用上也有各自的局限性[1~3]. 本文采用矩阵奇异值分解方法，获得了一种比较实用的降阶最优滤波器的设计方法.

2 最优滤波器的设计方法

考虑广义离散随机线性系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \tag{1a}$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k). \tag{1b}$$

其中 $x(k)\in \mathrm{R}^n, y(k)\in \mathrm{R}^r, w(k)\in \mathrm{R}^m, v(k)\in \mathrm{R}^r$，分别是系统(1)的状态、量测输出、动态干扰噪声和量测噪声，E, A, B, C 是相应维数的常实矩阵. 假设

1) 系统(1)是正则的，即 $\mathrm{rank}E = n_1 < n$ 且 $\det(zE-A)\neq 0$；

2) 系统(1)是 Y-能观的，即满足

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \mathrm{rank}E.$$

3) 干扰噪声 $\{w(k)\}$ 和 $\{v(k)\}$ 是零均值的高斯随机序列，且

$$E\{w(k)w^{\mathrm{T}}(j)\} = Q(k)\delta_{kj}, \quad E\{v(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = R(k)\delta_{kj}, \quad E\{w(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = 0, \quad \forall\, k, j.$$

其中 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 均为已知对称正定矩阵；

4) 容许初值 $x(0)$ 是均值和方差分别为 $\bar{x}_0, P_0$ 的高斯随机变量，且

$$E\{x(0)w^{\mathrm{T}}(k)\} = 0, \quad E\{x(0)v^{\mathrm{T}}(k)\} = 0, \quad \forall\, k.$$

下面首先采用矩阵奇异值分解方法对系统(1)进行分解. 为此，不妨设矩阵 E 的奇异

本文于1992年4月6日收到. 1993年9月2日收到修改稿.

值及相应正交化的左、右奇异特征向量分别为

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,$$
$$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n,\quad v_i^{\mathrm{T}}v_j=\delta_{ij},$$
$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\quad u_i^{\mathrm{T}}u_j=\delta_{ij}.$$

由于 $\mathrm{rank}E=n_1<n$，不仿设 $\alpha_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n_1$ 以及 $\alpha_i=0, i=n_1+1,n_1+2,\cdots,n$. 记

$$V=\begin{bmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \\ v_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\quad U=[u_1\ u_2\ \cdots\ u_n],\quad \Sigma=\mathrm{diag}\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n_1}\},$$

则有 $V^{-1}=V^{\mathrm{T}}, U^{-1}=U^{\mathrm{T}}$. 并且，由矩阵奇异值分解定理有

$$E=U\mathrm{diag}\{\Sigma,\ 0\}V^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

引入状态变换

$$x(k)=V\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

并记

$$U^{\mathrm{T}}AV=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad U^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\quad CV=[C_1\ C_2],$$

则系统(1)受限等价于

$$x_1(k+1)=\Sigma^{-1}A_{11}x_1(k)+\Sigma^{-1}A_{12}x_2(k)+\Sigma^{-1}B_1w(k), \tag{4a}$$
$$0=A_{21}x_1(k)+A_{22}x_2(k)+B_2w(k), \tag{4b}$$
$$y(k)=C_1x_1(k)+C_2x_2(k)+v(k). \tag{4c}$$

如果矩阵 A_{22} 非奇异，即系统(1)是因果系统，则可由(4b)式解出 $x_2(k)$ 并代入(4a)和(4c)式，然后利用相关噪声下的卡尔曼滤波便可得到状态 $x_1(k)$ 的最优递推滤波. 若 A_{22} 为奇异矩阵，则将(4b)和(4c)式合并写成

$$\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix}x_2(k)=-\begin{bmatrix} A_{21} \\ C_1 \end{bmatrix}x_1(k)-\begin{bmatrix} B_2w(k) \\ v(k)-y(k) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

令

$$M=\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix} A_{21} \\ C_1 \end{bmatrix},\quad \xi(k)=-Nx_1(k)-\begin{bmatrix} B_2w(k) \\ v(k)-y(k) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

则由线性方程理论[4]知，(5)式 $Mx_2(k)=\xi(k)$ 关于 $x_2(k)$ 有解的充要条件是

$$(I-MM^{[1]})\xi(k)=0,\quad \forall\ k, \tag{7}$$

且解的表达式为

$$x_2(k)=M^{[1]}\xi(k)+(I-M^{[1]}M)\varphi(k). \tag{8}$$

其中 $M^{[1]}$ 为矩阵 M 的{1}-逆，$\varphi(k)$ 是任意向量. 进一步，若此解是唯一的，即解与 $\varphi(k)$ 无关的充要条件是 M 列满秩. 此时，M 的{1}-逆也就是左逆，即 $M^{[1]}M=I_{n-n_1}$. 由于

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E & A\\ 0 & E\\ 0 & C\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}U^{\mathrm T}EV & U^{\mathrm T}AV\\ 0 & U^{\mathrm T}EV\\ 0 & CV\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\Sigma & 0 & A_{11} & A_{12}\\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22}\\ 0 & 0 & \Sigma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_1 & C_2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\Sigma & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_{22}\\ 0 & 0 & \Sigma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_2\end{bmatrix}$$

$$=2n_1+\operatorname{rank}M=n+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}M-(n-n_1),$$

且由假设系统(1)是 Y-能观的，故有

$$\operatorname{rank}M=n-n_1, \tag{9}$$

即 M 是列满秩的. 于是

$$M^{[1]}=M^{+}=(M^{\mathrm T}M)^{-1}M^{\mathrm T}, \tag{10}$$

即 $M^{[1]}$是唯一的. 记

$$P\triangleq M^{[1]}=[P_1\ P_2].$$

其中 $P_1\in\mathrm{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$, $P_2\in\mathrm{R}^{(n-n_1)\times r}$, 用 P 左乘(5)式得

$$x_2(k)=-(P_1A_{21}+P_2C_1)x_1(k)+P_2y(k)-P_1B_2w(k)-P_2v(K). \tag{11}$$

记

$$L_1=-(P_1A_{21}+P_2C_1),\quad L_2=-[P_1B_2\ P_2],\ \eta(k)=\begin{bmatrix}w(k)\\ v(k)\end{bmatrix},$$

则(11)式成为

$$x_2(k)=L_1x_1(k)+P_2y(k)+L_2\eta(k). \tag{12}$$

将(12)式代入(4a)式并考虑到(7)式得

$$x_1(k+1)=\overline{A}x_1(k)+\overline{B}y(k)+\overline{C}\eta(k), \tag{13a}$$

$$Dy(k)=Hx_1(k)+\Gamma\eta(k). \tag{13b}$$

其中

$$\overline{A}=\Sigma^{-1}(A_{11}+A_{12}L_1),\quad \overline{B}=\Sigma^{-1}A_{12}P_2,\quad \overline{C}=\Sigma^{-1}(A_{12}L_2+[\ B_1\ 0]),$$

$$D=(I-MP)\begin{bmatrix}0\\ I_r\end{bmatrix},\quad H=(I-MP)N,\quad \Gamma=(I-MP)\begin{bmatrix}B_2 & 0\\ 0 & I_r\end{bmatrix}.$$

由于(13)式是正常线性系统，故应用相关噪声下的卡尔曼滤波便得到状态 $x_1(k)$的最优滤波器的方程为

$$\hat{x}_1(k|k)=\hat{x}_1(k|k-1)+K(k)[Dy(k)-H\hat{x}_1(k|k-1)], \tag{14}$$

$$K(k)=P_1(k|k-1)H^{\mathrm T}[HP_1(k|k-1)H^{\mathrm T}+\Gamma\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm T}]^{-1}, \tag{15}$$

$$P_1(k|k)=[I-K(k)H]P_1(k|k-1), \tag{16}$$

$$\hat{x}_1(k+1|k)=[\overline{A}-F(k)H]\hat{x}_1(k|k)+[\overline{B}+F(k)D]y(k), \tag{17}$$

$$P_1(k+1|k)=[\overline{A}-F(k)H]P_1(k|k)[\overline{A}-F(k)H]^{\mathrm T}+\overline{C}\overline{R}(k)\overline{C}^{\mathrm T}. \tag{18}$$

其中

$$F(k)=\overline{C}\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm T}(\Gamma\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm T})^{-1},$$

$$\overline{R}(k)=\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}$$
$$-\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm T}(\Gamma\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm T})^{-1}\Gamma\operatorname{diag}\{Q(k),R(k)\}.$$

利用文献[5]的方法容易计算子系统(13)式的噪声 $\eta(k)$(即原系统(1)的动态噪声和

量测噪声)的滤波和相应的误差方差阵为

$$\hat{\eta}(k|k)=\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm{T}}[HP_1(k|k-1)H^{\mathrm{T}}+\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm{T}}]^{-1}[Dy(k)-H\hat{x}_1(k|k-1)],\tag{19}$$

$$P_{\eta}(k|k)=\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}-\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm{T}}[HP_1(k|k-1)H^{\mathrm{T}}+\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm{T}}]^{-1}\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}.\tag{20}$$

于是,由(12)式可得状态 $x_2(k)$ 的最优滤波为

$$\hat{x}_2(k|k)=L_1\hat{x}_1(k|k)+P_2y(k)+L_2\hat{\eta}(k|k).\tag{21}$$

定义滤波误差,$\tilde{x}_i(k|k)=x_i(k)-\hat{x}_i(k|k),i=1,2;\tilde{\eta}(k|k)=\eta(k)-\hat{\eta}(k|k)$. 由(12)式和(21)式得

$$\tilde{x}_2(k|k)=L_1\tilde{x}_1(k|k)+L_2\tilde{\eta}(k|k).\tag{22}$$

考虑到(14)和(13b)式得

$$\begin{aligned}E\{\tilde{x}_1(k|k)\eta^{\mathrm{T}}(k|k)\}&=E\{\tilde{x}_1(k|k)\eta^{\mathrm{T}}(k|k)\}\\&=E\{[x_1(k)-\hat{x}_1(k|k)]\eta^{\mathrm{T}}(k)\}\\&=E\{[\tilde{x}_1(k|k-1)-K(k)(H\tilde{x}_1(k|k-1)+\Gamma\eta(k))]\eta^{\mathrm{T}}(k)\}\\&=-K(k)\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\},\end{aligned}$$

因而

$$P_2(k|k)=E\{\tilde{x}_2(k|k)\tilde{x}_2^{\mathrm{T}}(k|k)\}=L_1P_1(k|k)L_1^{\mathrm{T}}+L_2P_{\eta}(k|k)L_2^{\mathrm{T}}-L_1K(k)\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}L_2^{\mathrm{T}}-L_2\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}\Gamma^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}(k)L_1^{\mathrm{T}},\tag{23}$$

$$P_{12}(k|k)=E\{\tilde{x}_1(k|k)\tilde{x}_2^{\mathrm{T}}(k|k)\}=P_1(k|k)L_1^{\mathrm{T}}-K(k)\Gamma\mathrm{diag}\{Q(k),R(k)\}L_2^{\mathrm{T}}.\tag{24}$$

最后,由状态变换 $x(k)=V[x_1^{\mathrm{T}}(k)\ x_2^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$ 可得原系统(1)的状态 $x(k)$ 的最优滤波和滤波误差方差阵为

$$\hat{x}(k|k)=V[\hat{x}_1^{\mathrm{T}}(k|k)\ \hat{x}_2^{\mathrm{T}}(k|k)]^{\mathrm{T}},\tag{24}$$

$$P(k|k)=V\begin{bmatrix}P_1(k|k) & P_{12}(k|k)\\P_{12}^{\mathrm{T}}(k|k) & P_2(k|k)\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}.\tag{25}$$

注 为了简便,对子系统(13)式采用了标准卡尔曼滤波来估计 $x_1(k)$,根据要求还须假设 Γ 阵行满秩. 如果这个条件不满足,则可采用降阶滤波得到 $x_1(k)$ 的估计[3].

3 结 论

本文采用矩阵奇异值分解方法将原系统分解为两个子系统,并通过估计子系统的状态,获得了原系统的状态估计,由于分解使滤波器维数降低,从而有效地减少了计算量. 并且,由于系统给定后,分解过程可预先完成,因此,该算法适用于在线实时估计. 此外,在实际应用中,动态噪声和量测噪声的统计特性大都难以精确确定,这必然要影响到估计精度,而本文的算法同时给出了动态噪声和量测噪声的估计,如果利用它们来修正动态和量测噪声的统计特性,对提高估计精度是十分有益的. 在推导算法的过程中,除要求系统 Y-能观外没有过多的限制,因此,该算法具有较广泛的应用性. 关于滤波器的稳定性有待进一步研究.

参 考 文 献

[1] 王恩平，王朝珠. 广义离散随机线性系统的递推滤波方法(I). 自动化学报，1988，14(6)：409—415
[2] Dai, Li Yi. State Estimation for Singular Systems. In: Proc. 10th IFAC 1987, 209—213
[3] Dai, L. Y. Filtering and LQG Problem for Discrete-Time Stochastic Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(10): 1105—1108
[4] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984
[5] Dai, G. Z., Mendel, J. M.. AStraightforward and Unified Approach to the Derivation of Minimum-Variance Deconvolution Algorithms. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(1): 80—83

On the Design of Optimal Filter for Generalized State Space System Using Singular Value Decomposition

QIN Chaoying　and　DAI Guanzhong
(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: In this paper, the state estimation problem for generalized discrete stochastic linear system is discussed. By use of the matrix singular value decomposition, a practical method of designing a reduced-order optimal filter is given. At the same time, the estimation of the disturbance noises for the dynamic systems and measure systems is obtained.

Key words: generalized discrete system; singular value decomposition; optimal filter

本文作者简介

秦超英　1958 年生. 1981 年毕业于西北工业大学应用数学系. 现为西北工业大学应用数学系讲师. 在职博士生. 研究方向为广义系统，估计理论及随机控制.

戴冠中　见本刊 1994 年第 1 期第 7 页.