第 11 卷第 2 期
1994 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 2
Apr., 1994

# Hammerstein 系统参数的集员辨识*

徐桥南　袁震东
(华东师范大学数学系·上海,200062)

**摘要**：本文运用多输入多输出系统参数的集员辨识的结果讨论了 Hammerstein 系统参数的集员辨识. 在系统动态噪声有界的假定下导出了 Hammerstein 系统参数的成员集是个椭球，并证明了在一定条件下椭球趋向于一点，文中还给出了仿真例子.

**关键词**：集员辨识；收敛性；最小二乘法

## 1 引　　言

集员辨识是一种新兴的、有成效的系统辨识方法. 这种方法同以往的辨识方法最大的不同在于它不假定所给出的系统噪声是已知某些性质的随机过程而只是假定它的动态噪声有界或动态噪声功率有界. 集员辨识根据噪声有界或噪声功率有界，导出一总是包含真参数的成员集(椭球)，在一定条件下，当采样个数越来越多时，椭球不断地缩小，类似于侦破小说中当线索越来越多时，嫌疑犯的范围越来越窄. 因此有人风趣地称之为福尔摩斯法. 又因为集员辨识给出系统参数或传递函数所在的集合，以这集合中最不利情况设计的控制器无疑地将适合于整个集合，此所以集员辨识在鲁棒控制方面有很大的用场.

1979 年 Fogel 和 1982 年 Fogel 和 Huang 给出了单输入单输出系统参数的集员辨识. 在此基础上，我们给出了多输入多输出系统参数的集员辨识. 本文将运用这方面的结果给出一类特殊的非线性系统 Hammerstein 系统参数的集员辨识的结果. 本文第二节概括多输入多输出(MIMO)系统参数的集员辨识的基本结果，第三节导出 Hammerstein 系统参数的集员辨识及收敛性分析，第四节是仿真例子，第五节是结论.

## 2 MIMO 系统参数集员辨识的基本结果

考虑如下 MIMO 线性系统

$$y_k = A_1 y_{k-1} + \cdots + A_p y_{k-p} + B_1 u_{k-1} + \cdots + B_q u_{k-q} + \omega_k. \tag{2.1}$$

其中 $y_k$ 是 $m$ 维的输出，$u_k$ 是 $l$ 维输入，$\omega_k$ 是 $m$ 维动态噪声. $\omega_k$ 不可量测，但其功率有界，即

$$\sum_{i=1}^{k} \| \omega_i \|^2 \leqslant F(k). \tag{2.2}$$

其中 $F(k)$ 是与 $k$ 有关的纯量.

记

$$\theta^{\mathrm{T}} = [A_1 \cdots A_p\ B_1 \cdots B_q]_{m \times (mp+lq)},$$

$$X_k^{\mathrm{T}} = [y_{k-1}^{\mathrm{T}} \cdots y_{k-p}^{\mathrm{T}}\ u_{k-1}^{\mathrm{T}} \cdots u_{k-q}^{\mathrm{T}}]_{1 \times (mp+lq)}.$$

---

* 国家自然科学基金项目.

本文于1993年1月9日收到.

在假设 $\sum_{i=1}^{k} X_i X_i^T$ 正定下，可验证包含 $\theta$ 的椭球 $\Theta_k$ 可写成

$$\theta \in \Theta_k = \{\theta: \sum_{i=1}^{k} \| y_i - \theta^T X_i \|^2 \leqslant F(k)\}$$
$$= \{\theta: \mathrm{tr}(\theta - \theta_c(k))^T P_k^{-1} (\theta - \theta_c(k)) \leqslant G(k)\}.$$

其中

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^{k} x_i x_i^T, \tag{2.3}$$

$$\theta_c(k) = P_k \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^T, \tag{2.4}$$

$$G(k) = F(k) - \mathrm{tr} Y_k^T Y_k + \mathrm{tr} \theta_c^T(k) P_k^{-1} \theta_c(k). \tag{2.5}$$

(2.4)是参数 $\theta$ 的最小二乘估计.

(2.3),(2.4),(2.5)可写成递推形式

$$\theta_c(k) = \theta_c(k-1) + \alpha_k P_{k-1} x_k [y_k^T - x_k^T \theta_c(k-1)],$$
$$P_k = P_{k-1} - \alpha_k P_{k-1} x_k x_k^T P_{k-1},$$
$$G(k) = G(k-1) + (F(k) - F(k-1)) - \alpha_k \mathrm{tr}[y_k - \theta_c^T(k-1) x_k][y_k^T - x_k^T \theta_c(k-1)].$$

这里

$$\alpha_k = (1 + x_k^T P_{k-1} x_k)^{-1}$$

在 1979 年 Fogel 的收敛性定义下，可得出 $\Theta_k$ 收敛的充分性条件.

**定理 1** 若系统(2.1)稳定，$\{\omega_i\}$是白噪声的，即存在一正函数 $g(k)$，$g(k) = O(1/k)$，$\{\omega_i\}$满足

i) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 0$；

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) \sum_{i=1}^{k} \omega_i \omega_{i-j}^T = Q\delta(j)$.（这里 $Q$ 是正定阵，$\delta(j)$是 Kronecker $\delta$ 函数).

$\{u_i\}$满足

i) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) \sum_{i=1}^{k} \omega_i \bar{u}_{i-j}^T$，　$\forall\ j$；

ii) $\exists\ N > 0$，$\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，　$\forall\ m$，

$$0 < \alpha_1 I \leqslant \sum_{i=m}^{m+N} \bar{u}_i \bar{u}_i^T \leqslant \alpha_2 I < \infty.$$

其中

$$\bar{u}_i^T = [u_{i-1}^T \cdots u_{i-q}^T]_{1\times lq},$$

则

i) 当 $k\to\infty$时，$\theta_c(k) \to \theta_t$.

ii) 椭球必收敛于一点，即参数真值$\theta_t$.

详细推导将另文发表.

## 3 Hammerstein 系统参数的集员辨识

考虑 Hammerstein 系统

$$A(q)y(k) = B_1(q)u(k-1) + \cdots + B_m(q)u^m(k-1) + \omega(k). \tag{3.1}$$

其中

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_Nq^{-N},$$
$$B_i(q) = b_{i0} + b_{i1}q^{-1} + \cdots + b_{in}q^{-n}, \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$

$\omega(k)$不可量测但功率有界，即

$$\sum_{i=1}^{k}\omega^2(k) \leqslant F(k),$$

$F(k)$是关于 $k$ 的纯量.

(3.1)又可写成

$$\begin{aligned}y(k) &= (1 - A(q))y(k) + B_1(q)u(k-1) + \cdots + B_mu^m(k-1) + \omega(k)\\ &= -a_1y(k-1) - \cdots - a_Ny(k-N)\\ &\quad + [b_{10} \cdots b_{m0}]\begin{bmatrix}u(k-1)\\ \vdots\\ u^m(k-1)\end{bmatrix} + \cdots + [b_{1n} \cdots b_{mn}]\begin{bmatrix}u(k-n-1)\\ \vdots\\ u^m(k-n-1)\end{bmatrix} + \omega(k),\end{aligned}$$

记

$$u_{k-1} = \begin{bmatrix}u(k-1)\\ \vdots\\ u^m(k-1)\end{bmatrix}, \quad y_{k-1} = y(k-1), \quad \omega_k = \omega(k),$$

$$\theta^{\mathrm{T}} = [[-a_1 \cdots -a_N]\ [b_{10} \cdots b_{m0}] \cdots [b_{1n} \cdots b_{mn}]]_{1\times[N+m(n+1)]},$$
$$X_k^{\mathrm{T}} = [y_{k-1} \cdots y_{k-N}\ u_{k-1}^{\mathrm{T}} \cdots u_{k-n-1}^{\mathrm{T}}]_{1\times[N+m(n+1)]}.$$

设$\sum_{i=1}^{k}X_iX_i^{\mathrm{T}}$正定，将 2 结果运用于 Hammerstein 系统得

$$\begin{aligned}\theta \in \Theta_k &= \{\theta: \sum_{i=1}^{k}(y_i - \theta^{\mathrm{T}}X_i)^2 \leqslant F(k)\}\\ &= \{\theta: (\theta - \theta_c(k))^{\mathrm{T}}P_k^{-1}(\theta - \theta_c(k)) \leqslant G(k)\}.\end{aligned}$$

其中

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^{k}X_iX_i^{\mathrm{T}}, \tag{3.2}$$

$$\theta_c(k) = P_k\sum_{i=1}^{k}X_iy_i, \tag{3.3}$$

$$G(k) = F(k) - \sum_{i=1}^{k}y_i^2 + \theta_c^{\mathrm{T}}(k)P_k^{-1}\theta_c(k). \tag{3.4}$$

对应于(3.2),(3.3),(3.4)的递推形式为

$$\theta_c(k) = \theta_c(k-1) + \alpha_kP_{k-1}X_k[y_k - X_k^{\mathrm{T}}\theta_c(k-1)], \tag{3.5}$$
$$P_k = P_{k-1} - \alpha_kP_{k-1}X_kX_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}, \tag{3.6}$$
$$G(k) = G(k-1) + (F(k) - F(k-1)) - \alpha_k[y_k - X_k^{\mathrm{T}}\theta_c(k-1)]^2. \tag{3.7}$$

这里

$$\alpha_k = (1 + X_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}X_k)^{-1}$$

进一步，将 2 中 $\Theta_k$ 收敛性分析的结果运用于 Hammerstein 系统，得到定理 1 的直接推广形式：

**定理 2**　若 Hammerstein 系统(3.1)稳定，且$\{\omega(i)\}$是白噪声的，即存在正函数 $g(k)$，

$g(k)=O(1/k)$，$\{\omega(i)\}$满足

i) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k)\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(i)=0$；

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k)\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(i)\omega(i-j)=c\delta(j)$；　$c>0$，

且$\{u(i)\}$满足

i) $\lim\limits_{k\to\infty} g(k)\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{u}(i)\omega(i-j)=0$，　$\forall\ j$，　(3.8)

ii) $\exists\ N>0$，$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$，　$\forall\ m$，

$$0<\alpha_1 I\leqslant\sum_{i=m}^{m+N}\bar{u}(i)\bar{u}(i)^{\mathrm{T}}\leqslant\alpha_2 I<+\infty.$$

这里
$$\bar{u}^{\mathrm{T}}(k)=[u(k-1)\ \cdots\ u^m(k-1)\ u(k-2)\ \cdots\ u^m(k-2)\ \cdots\ u(k-n-1)\ \cdots\ u^m(k-n-1)].$$

则

i) $\theta_c(k)\to\theta_t$，当 $k\to\infty$时；

ii) $\theta$ 所在的椭球必收敛于一点$\theta_t$.

定理 1 的证明将另文发表.

## 4 仿真例子

**例**

$$y(k)=0.1u(k-1)+0.2u^2(k-1)+e(k).$$

取 $u(k)$为以 20 为周期，$u(k)=0.8, k=1,2,\cdots,10. u(k)=-0.9, k=11,\cdots,20$；$e(k)\sim N(0,0.05)$，显然它们满足定理 2 条件.

根据 3 中的(3.5)～(3.7)，选取 $\theta_c(0)=0, P_0=0.1I_2, G(k)=1, X_1=[0\ 0]^{\mathrm{T}}$，我们得到四个图. 附图上方的"200 步"表示图为迭代 200 步后的结果. 可以看出，附图中的椭圆随着步数的增加不断地缩小.

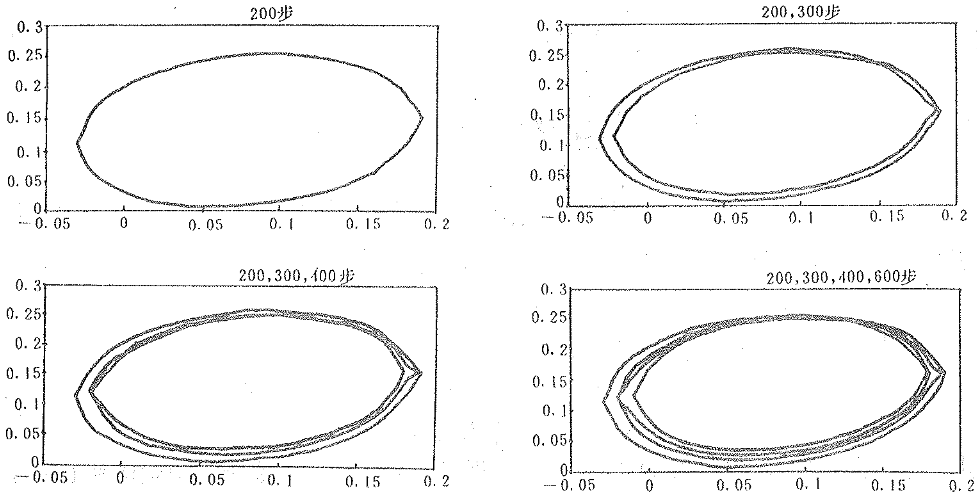


图 1　Hammerstein 系统参数集员辨识仿真结果

## 5 结 论

Hammerstein 系统可归结为多输入多输出系统，所以它的集员辨识是多输入多输出系统参数集员辨识的应用.

## 参 考 文 献


[1] Fogel, E.. System Identification via Membership Set Constraints with Energy Constrained Noise. IEEE Trans. Auotmat. Contr., 1979, AC-24(5):752—758

[2] Fogel, E. and Huang, Y. F.. On the Value of Information in System Identification-Bounded Noise Case. Automatic, 1982, 18(2):229—238

[3] Deller, J. P.. Set Membership Identification in Digital Signal Processing. IEEE ASSP Magzine, 1989, 6(4):4—20

[4] Ljung, L.. 袁震东等译. 系统辨识——使用者的理论. 上海:华东师范大学出版社, 1990

[5] 袁震东. 自适应控制理论与应用. 上海:华东师范大学出版社, 1988


# Set Membership Identification for the Parameters of Hammerstein Systems


XU Qiaonan and YUAN Zhendong

(Department of Mathematics, East China Normal University · Shanghai, 200062, PRC)



**Abstract**: The set membership identification for the parmeters of Hammerstein systems is discussed by using the conclusion of the set membership identification for the parameters of MIMO systems in this paper. Assuming that the en-rgy of the noise is unknown but bounded, a membership set for the parameters is an ellipsoid which will converge to a point under certain conditions. The numerical simulation is given.



**Key words**: set menbership identification; convergence; least squares method



### 本文作者简介

**徐桥南** 女. 1969 年生. 上海华东师范大学数学系运筹学与控制理论专业硕士. 现从事计算机软件工程.

**袁震东** 1937 年生. 华东师范大学数学系教授. 学术兴趣为系统辨识，自适应控制和人工神经网络在控制中的应用. 现任中国自动化学会控制理论委员会委员，上海市自动化学会常务理事兼理论委员会主任. 中国工业与应用数学学会理事兼控制理论委员会委员.