第 11 卷第 3 期
1994 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 3
Jun., 1994

一类连续时间广义边值系统的能控性和能观性

奚宏生
(中国科学技术大学自动化系·合肥,230026)

摘要：连续时间广义边值系统被描述为 $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, $V_0x(0)+V_Tx(T)=v$，其中 E 是奇异方阵，$u(t)$满足任意次可微，本文讨论了一类连续时间广义边值系统的有关向内和向外边值过程的两个重要概念，并在此基础上给出了能控性和能观性定义和判别准则.

关键词：广义边值系统；向内和向外边值过程；能控性和能观性

最近几年，文章[1,2]等讨论了连续时间边值系统的定义和状态空间理论. 接着，文章[3,4]成功地将这些理论推广到离散时间广义边值系统中，并且文章[5]又给出了连续时间广义边值系统的可解性及其状态解的结构形式. 本文在[1,5]和[6]的基础上进一步讨论连续时间广义边值系统的能控性和能观性问题.

1 基本事实

连续时间广义边值系统可以被描述为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$V_0x(0) + V_Tx(t) = v, \tag{1.2}$$

$$y(t) = Cx(t). \tag{1.3}$$

其中 $x(t)\in \mathrm{R}^n$, $u(t)\in \mathrm{R}^r$ 满足任意次可微，$y(t)\in \mathrm{R}^p$, $E, A, V_0, V_T\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $B\in \mathrm{R}^{n\times r}$, $C\in \mathrm{R}^{p\times n}$. E 奇异，边界输入 $v\in \mathrm{R}^n$.

如果存在 $\lambda\in \mathrm{R}$，矩阵束$(\lambda E-A)$非奇异，则系统(1.1)，(1.2)具有下列基本事实(见[5,7]).

i) 设 $\mathrm{rank}E=n_1<n$, $n-n_1=n_2$，存在可逆矩阵 Q，使

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1}E = Q^{-1}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}Q,$$

$$\hat{A} = (\lambda E - A)^{-1}A = Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda D - I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda N - I_{n_2} \end{pmatrix}Q,$$

$$\hat{B} = (\lambda E - A)^{-1}B.$$

其中 $D\in \mathrm{R}^{n_1\times n_1}$是满秩矩阵，$N\in \mathrm{R}^{n_2\times n_2}$是幂零矩阵，$\mathrm{ind}N=m$, I_{n_1}和 I_{n_2}分别是 $n_1\times n_1$ 和 $n_2\times n_2$ 单位矩阵.

ii)矩阵 $\hat{E}, \hat{A}$ 的 Drazin 逆分别记为 $\hat{E}^d, \hat{A}^d$，显然有

$$\hat{E}\hat{E}^d = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \quad (I_n - \hat{E}\hat{E}^d) = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}Q,$$

本文于1992年12月16日收到. 1993年10月23日收到修改稿.

$$\hat{E}^d\hat{A} = Q^{-1}\begin{pmatrix} D^{-1}(\lambda D - I_{n_1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = E_1,$$

$$(I_n - \hat{E}\hat{E}^d)(\hat{E}\hat{A}^d)^i = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [N(\lambda N - I_{n_2})^{-1}]^i \end{pmatrix} Q = E_2^i,$$

$$i = 0, 1, \cdots, m-1,$$

并记 $\hat{E}^d\hat{B} = B_1, \hat{A}^d\hat{B} = B_2$.

iii) 设 $J = V_0 + V_r e_0^{E_1 T}$，若 J 非奇异，则称系统(1.1)，(1.2)是适定的，其中 $e_0^{E_1 t} = e^{E_1 t}\hat{E}\hat{E}^d$. 如果 V_0, V_T 满足

$$V_0 + V_T e_0^{E_1 T} = I_n, \tag{1.4}$$

则称系统(1.1)，(1.2)是标准适定的. 为简便起见，下述讨论的系统均为标准适定系统.

iv) 在上述基本事实下，根据[5]中的可解性定理可得到

定理 1.1 对给定的允许控制 $u(t)$，如果边界输入

$$v \in V = \{v \mid v = \xi + \alpha_1\eta_1 + \cdots + \alpha_{n_1}\eta_{n_1}\},$$

其中 $(\alpha_1 \cdots \alpha_{n_1}) \in \mathrm{R}^{n_1}$ 是任意向量，$\eta_i = Q^{-1}e_i, e_i \in \mathrm{R}^n, i = 1, 2, \cdots, n_1$ 是单位向量，$\xi = -V_0\sum_{i=0}^{m-1}E_2^i B_2 u^{(i)}(0) - V_T\sum_{i=0}^{m-1}E_2^i B_2 u^{(i)}(T)$，边界矩阵 V_T 满足与 $\hat{E}\hat{E}^d$ 可交换，则标准适定系统(1.1)，(1.2)是可解的，并有唯一状态解.

$$x(t) = e_0^{E_1 t}(v - \xi) + \int_0^T G(t,s)B_1 u(s)\mathrm{d}s - \sum_{i=0}^{m-1}E_2^i B_2 u^{(i)}(t), \tag{1.5}$$

其中 $G(t,s)$ 是 Green 函数矩阵，被定义为

$$G(t,s) = \begin{cases} e_0^{E_1 t}V_0 e_0^{-E_1 s}, & s < t, \\ -e_0^{E_1 t}V_T e_0^{E_1(T-s)}, & s > t. \end{cases}$$

满足性质

$$\frac{\mathrm{d}G(t,s)}{\mathrm{d}t} = E_1 G(t,s),$$

$$V_0 G(0,s) + V_T G(T,s) = 0,$$

$$G(t, t-0) - G(t, t+0) = \hat{E}\hat{E}^d.$$

此时，输出(1.3)为

$$y(t) = Ce_0^{E_1 t}(v - \xi) + \int_0^T CG(t,s)B_1 u(s)\mathrm{d}s - \sum_{i=0}^{m-1}CE_2^i B_2 u^{(i)}(t). \tag{1.6}$$

2 向内和向外边值过程

在讨论系统的能控性和能观性时，我们不妨将所选择的允许控制规定为满足 $u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T) = 0, i = 0, 1, 2, \cdots m-1$. 此时允许输入边界集 $V = \{v \mid v = $ 啊 $\alpha_1\eta_1 + \cdots + \alpha_{n_1}\eta_{n_1}\}$ 与控制无关，将状态解分解为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{2.1}$$

$$x_1(t) = e_0^{E_1 t}v + \int_0^T G(t,s)B_1 u(s)\mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1}E_2^i B_2 u^{(i)}(t). \tag{2.3}$$

设 $R(\hat{E}\hat{E}^d)$ 是矩阵 $\hat{E}\hat{E}^d$ 中 n_1 个线性无关的列向量所张成的子空间，$R(I_n - \hat{E}\hat{E}^d)$ 是矩阵

$(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$中 n_2 个线性无关的列向量所张成的子空间. 因此, $R(\hat{E}\hat{E}^d)\perp R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$且 $R(\hat{E}\hat{E}^d)\oplus R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)=R^n$, 显然, $x_1(t)\in R(\hat{E}\hat{E}^d)$, $x_2(t)\in R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$.

设 $x(t)$是系统(1.1), (1.2)的状态解(2.1)~(2.3), 定义向内边值过程为: 对给定的时间对$\{\tau_0,\tau_1\}$, $0<\tau_0<\tau_1<T$,

$$i(\tau_0,\tau_1)=i_1+i_2, \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned} i_1 &= e_0^{E_1\tau_0}V_0e_0^{-E_1\tau_0}x_1(\tau_0)+e_0^{E_1\tau_0}V_Te_0^{E_1(T-\tau_1)}x_1(\tau_1) \\ &= e_0^{E_1\tau_0}v+\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T}\right)G(\tau_0,s)B_1u(s)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{2.5}$$

并且

$$i_2=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u^{(i)}(\tau_0). \tag{2.6}$$

我们视$\{\tau_0,\tau_1\}$为现在时刻, $[0,T]\backslash[\tau_0,\tau_1]$为过去时刻, 并且$(\tau_0,\tau_1)$为将来时刻, 那么, 现在时刻值 $i(\tau_0,\tau_1)$表示映射: $u(\cdot)\rightarrow i(\tau_0,\tau_1)$具有一般因果性. 令 $K_0=e_0^{E_1\tau_0}V_0e^{-E_1\tau_0}+(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$, $K_1=e_0^{E_1\tau_0}V_Te_0^{E_1(T_1-\tau_1)}$, 定义在$[\tau_0,\tau_1]$上的广义边值系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{2.7}$$

$$K_0x(\tau_0)+K_1x(\tau_1)=i(\tau_0,\tau_1), \tag{2.8}$$

满足 $K_0+K_1e_0^{E_1(\tau_1-\tau_0)}=I_n$, 而且与系统(1.1), (1.2)在 $t\in[\tau_0,\tau_1]$上有相同解.

我们定义向外边值过程

$$O(\tau_0,\tau_1)=O_1+O_2, \tag{2.9}$$

其中

$$O_1=-e_0^{E_1(\tau_1-\tau_0)}x_1(\tau_0)+x_1(\tau_1)=\int_{\tau_0}^{\tau_1}e_0^{E_1(\tau_1-s)}B_1u(s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

$$O_2=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u^{(i)}(\tau_1). \tag{2.11}$$

显然, 现在时刻值 $O(\tau_0,\tau_1)$与 $i(\tau_0,\tau_1)$具有相反因果性. 对定义在$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上的广义边值系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{2.12}$$

$$V_0x(0)+V_Tx(T)=v, \tag{2.13}$$

$$-e_0^{E_1(\tau_1-\tau_0)}x(\tau_0)+x(\tau_1)=O(\tau_0,\tau_1), \tag{2.14}$$

与系统(1.1), (1.2)在 $t\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上有相同的解.

3 能控性

根据(2.4)~(2.6)式, 对允许控制 $u(s)$, $s\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$, 记映射 $F_{i_1}:u\rightarrow i_1=\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T}\right)G(\tau_0,s)B_1u(s)\mathrm{d}s$(等价于(2.5)中 $v=0$), $F_{i_2}:u\rightarrow i_2=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u^{(i)}(\tau_0)$. 并且设 i_1, i_2的能达到集分别为

$$R_{i_1}=\{i_1\mid F_{i_1}u=i_1\}\subset R(\hat{E}\hat{E}^d),$$

$$R_{i_2}=\{i_2\mid F_{i_2}u=i_2\}\subset R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d).$$

定义 3.1　对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$, 如果经映射 $F_i=F_{i1}+F_{i2}$

$$F_i:\{u(s):s\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)\}\rightarrow i_1+i_2\in R_{i_1}\oplus R_{i_2}$$

是映上的，则称系统(1.1)，(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是R-能控的.

定义 3.2 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$，如果经映射$F_i=F_{i_1}+F_{i_2}$

$$F_i:\{u(s):s\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)\}\to i_1+i_2\in R(\hat{E}\hat{E}^d)\oplus R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$$

是映上的，则称系统(1.1)，(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是C-能控的.

定理 3.1 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$，设

$$W_1[\tau_0,\tau_1]=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1B_1'G'(\tau_0,s)\mathrm{d}s;$$

$$S=[B_2,E_2B_2,E_2^2B_2,\cdots,E_2^{m-1}B_2].$$

i) 如果$\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$，则系统(1.1)，(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是R-能控的.

ii) 如果$\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$，并且$\mathrm{rank}S=n_2$，则系统(1.1)，(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是C-能控的.

证 i) 对任意$i_1\in R_{i_1}$，$i_2\in R_{i_2}$，取$u(s)=u_1(s)+u_2(s)$，此时，$i_1=F_{i_1}(u_1+u_2)=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u_1(s)\mathrm{d}s+(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u_2(s)\mathrm{d}s$，并且$i_2=F_{i_2}(u_1+u_2)=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u_1^{(i)}(\tau_0)-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u_2^{(i)}(\tau_0)$.

我们设$i_1^*=i_1-(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u_2(s)\mathrm{d}s=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u_1(s)\mathrm{d}s$. 显然$i_1^*\in R_{i_1}$，并且满足$\hat{E}\hat{E}^di_1^*=i_1^*$. 令

$$W_1^*[\tau_0,\tau_1]=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})f(s)G(\tau_0,s)B_1B_1'G'(\tau_0,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$f(s)=s^m(s-\tau_0)^m(s-T)^m$，由于$f^{(i)}(s),i=0,1,\cdots,m-1$. 仅在$s=0,\tau_0,T$有限个点上为零，所以$\mathrm{rank}W_1^*[\tau_0,\tau_1]=\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$，取$u_1(s)=f^2(s)B_1'G'(\tau_0,s)W_1^{*d}[\tau_0,\tau_1]i_1^*$，其中$W_1^{*d}[\tau_0,\tau_1]$是$W_1^*[\tau_0,\tau_1]$的Drazin逆，满足$W_1^*[\tau_0,\tau_1]W_1^{*d}[\tau_0,\tau_1]=\hat{E}\hat{E}^d$.

注意到$i_2=F_{i_2}u_2=-\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i$，$\beta_i\in\mathrm{Im}E_2^iB_2$，因此存在$z_i=(z_{i_1},z_{i_2},\cdots,z_{i_r})'\in R^r$，使$\beta_i=E_2^iB_2z_i$，$i_2=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2z_i$. 由Hermite内插值定理知，存在$3m-1$次多项式$P(t)\in R^r$，使$P^{(i)}(0)=P^{(i)}(T)=0$，$P^{(i)}(\tau_0)=z_i$，$i=1,2,\cdots,m-1$. 选择$u_2(s)=P(s)$，此时有

$$F_{i_1}u=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u(s)\mathrm{d}s=i_1^*+(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1u_2(s)\mathrm{d}s=i_1,$$

$$F_{i_2}u=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u^{(i)}(\tau_0)=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u_2^{(i)}(\tau_0)=i_2,$$

即存在映射$F_i=(F_{i_1}+F_{i_2}):u\to i_1+i_2\in R_{i_1}\oplus R_{i_2}$是映上的. 由定义3.1，系统(1.1)，(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是R-能控的.

ii) 设$F_{i_1}^*$是F_{i_1}的对偶映射，$F_{i_1}F_{i_1}^*=(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_1}^{T})G(\tau_0,s)B_1B_1'G'(\tau_0,s)\mathrm{d}s=W_1[\tau_0,\tau_1]$(见[2]). 由于$\mathrm{rank}F_{i_1}F_{i_2}^*=\mathrm{rank}F_{i_1}=n_1$，则$\dim R_{i_1}=\dim(\mathrm{Im}F_{i_1})=n_1$，即$R_{i_1}=R(\hat{E}\hat{E}^d)$. 当$\mathrm{rank}S=n_2$时，$\mathrm{rank}F_{i_2}=\mathrm{rank}S=n_2$，$\dim R_{i_2}=\dim(\mathrm{Im}F_{i_2})=n_2$，即$R_{i_2}=R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$. 由i)中选取的$u(s)=u_1(s)+u_2(s)$，使映射$F_i:u\to i_1+i_2\in R(\hat{E}\hat{E}^d)\oplus R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$，是映上的，服从定义3.2，因而命

题得证.

推论 3.1 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$W_1=[V_0B_1,V_TB_1,V_0E_1B_1,V_TE_1B_1,\cdots,V_0E_1^{n_1-1}B_1,V_TE_1^{n_1-1}B_1].$$

i) 如果 $\mathrm{rank}W_1=n_1$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是 R-能控的.

ii) 如果 $\mathrm{rank}W_1=n_1$,并且 $\mathrm{rank}S=n_2$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是C-能控的.

证 假如 $\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$,而 $\mathrm{rank}W_1<n_1$,由于 Q 非奇异,$\mathrm{rank}QW_1<n_1$,并由定理3.1的 ii)中 E_1和 B_1的定义,则存在 $\alpha=(\alpha_1,0)\in\mathrm{R}^n$,其中 $\alpha_1\in\mathrm{R}^{n_1}$是非零常向量,使 $\alpha'QW_1=0$. 即对任意 $i=0,1,2,\cdots$(由 Cayley-Hamilton 定理)

$$\alpha'QV_0E_1^iB_1=\alpha'QV_TE_1^iB_1=0.$$

因此,对任意 t,

$$\alpha'QV_0e_0^{E_1t}B_1=\alpha'QV_Te_0^{E_1t}B_1=0,$$

并且,注意到 $Qe_0^{-E_1\tau_0}W_1[\tau_0,\tau_1]e_0^{-E_1'\tau_0}Q'=\begin{pmatrix}w_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}$,其中 w_{11}是 $n_1\times n_1$对称矩阵,$\mathrm{rank}w_{11}=\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]$.

$$\alpha'Qe_0^{-E_1\tau_0}W_1[\tau_0,\tau_1]e_0^{-E_1'\tau_0}Q'\alpha=\int_0^{\tau_0}\alpha'QV_0e_0^{-E_1s}B_1B_1'e_0^{-E_1's}V_0'Q'\alpha ds$$
$$+\int_{\tau_1}^{T}\alpha'QV_Te_0^{-E_1(T-s)}B_1B_1'e_0^{-E_1'(T-s)}V_T'Q'\alpha ds=0$$

等价于 $\alpha_1'w_{11}\alpha_1=0$,即 $\mathrm{rank}w_{11}<n_1$,从而 $\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]<n_1$,与假设矛盾. 反之亦然. 因此 $\mathrm{rank}W_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$等价于 $\mathrm{rank}W_1=n_1$.

根据(2.10)～(2.12)式,对允许控制 $u(s),s\in[\tau_0,\tau_1]$,记映射 $F_{o_1}:u\to O_1=\int_{\tau_0}^{\tau_1}e_0^{E_1(\tau_1-s)}B_1u(s)ds$,$F_{o_2}:u\to O_2=-\sum_{i=0}^{m-1}E_2^iB_2u^{(i)}(\tau_1)$,并且设 O_1,O_2的能达到集分别为

$$R_{o_1}=\{O_1|F_{o_1}u=O_1\}\subset R(\hat{E}\hat{E}^d),$$
$$R_{o_2}=\{O_2|F_{o_2}u=O_2\}\subset R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d).$$

定义 3.3 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,如果经映射 $F_o=F_{o_1}+F_{o_2}$,

$$F_o:\{u(s):s\in[\tau_0,\tau_1]\}\to O_1+O_2\in R_{o_1}\oplus R_{o_2}$$

是映上的,则称系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是 R-能控的.

定义 3.4 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,如果经映射 $F_o=F_{o_1}+F_{o_2}$,

$$F_o:\{u(s):s\in[\tau_0,\tau_1]\}\to O_1+O_2\in R(\hat{E}\hat{E}^d)\oplus R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$$

是映上的,则称系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是 C-能控的.

定理 3.2 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$W_2[\tau_0,\tau_1]=\int_{\tau_0}^{\tau_1}e_0^{E_1(\tau_1-s)}B_1B_1'e_0^{E_1'(\tau_1-s)}ds.$$

i) 如果 $\mathrm{rank}W_2[\tau_0,\tau_1]=n_1$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是 R-能控的.

ii) 如果 $\mathrm{rank}W_2[\tau_0,\tau_1]=n_1$,并且 $\mathrm{rank}S=n_2$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是C-能控的.

推论 3.2 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$W_2 = [B_1, E_1B_1, \cdots, E_1^{n_1-1}B_1].$$

i) 如果 $\mathrm{rank}W_2=n_1$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是R-能控的.

ii) 如果 $\mathrm{rank}W_2=n_1$,并且 $\mathrm{rank}S=n_2$,则系统(1.1),(1.2)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是C-能控的(证明略).

4 能观性

系统(1.1)~(1.3)的输出

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

$$y_1(t) = Cx_1(t) = Ce_0^{E_1t}v + \int_0^T CG(t,s)B_1u(s)\mathrm{d}s,$$

$$y_2(t) = Cx_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} CE_2^iB_2u^{(i)}(t).$$

对给定的 $A,B,E,u(t)$,状态 $x_2(t)$总是可以算得的.因此,系统的能观性问题仅涉及到$y_1(t)=Cx_1(t)$.由于系统(2.7),(2.8)与系统(1.1),(1.2)在 $t\in[\tau_0,\tau_1]$上有相同解,因此,当 $t\in[\tau_0,\tau_1]$时

$$y_1(t) = Ce_0^{E_1(t-\tau_0)}i_1 + C\int_{\tau_0}^{\tau_1} G(t,s)B_1u(s)\mathrm{d}s.$$

定义 4.1 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,如果经映射 H_{i_1}

$$H_{i_1}: i_1 \to \{y_1(t) = Ce_0^{E_1(t-\tau_0)}i_1, \quad t\in[\tau_0,\tau_1]$$

是一一对应的,则称系统(1.1)~(1.3)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是能观的(这里边界输入 v 和允许控制 $u(s)$,$s\in[\tau_0,\tau_1]$被假设为零).

定理 4.1 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$Z_1[\tau_0,\tau_1] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} e_0^{E_1'(t-\tau_0)}C'Ce_0^{E_1(t-\tau_0)}\mathrm{d}t.$$

如果 $\mathrm{rank}Z_1[\tau_0,\tau_1]=n_1$,则系统(1.1)~(1.3)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是能观的.

由于系统(2.13)~(2.15)与系统(1.1),(1.2)在 $t\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上有相同解,因此,当 $t\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$,

$$y_1(t) = Ce_0^{E_1t}v + CG(t,\tau_1)O_1 + \left(\int_0^{\tau_0} + \int_{\tau_1}^T\right)G(\tau,s)B_1u(s)\mathrm{d}s.$$

定义 4.2 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,如果经映射 H_{o_1}

$$H_{o_1}: O_1 \to \{y_1(t) = CG(t,\tau_1)O_1, \quad t\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)\}$$

是一一对应的,则称系统(1.1)~(1.3)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是能观的(这里边界输入 v 和允许控制 $u(s)$,$s\in[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$被假设为零).

定理 4.2 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$Z_2[\tau_0,\tau_1] = \left(\int_0^{\tau_0} + \int_{\tau_1}^T\right)G'(t,\tau_0)C'CG(t,\tau_1)\mathrm{d}t.$$

如果 $\mathrm{rank}Z_2[\tau_0,\tau_1]=n_1$,则系统(1.1)~(1.3)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是能观的.

推论 4.1 对给定的$0<\tau_0<\tau_1<T$,设

$$Z_1=\begin{bmatrix} C \\ CE_1 \\ \vdots \\ CE_1^{n_1-1} \end{bmatrix},\quad Z_2=\begin{bmatrix} CV_0 \\ CV_T \\ CE_1V_0 \\ CE_1V_T \\ \vdots \\ CE_1^{n_1-1}V_0 \\ CE_1^{n_1-1}V_T \end{bmatrix}.$$

i) 如果 $\mathrm{rank}Z_1=n_1$，则系统(1.1)～(1.3)在区间$[\tau_0,\tau_1]$上是能观的.

ii) 如果 $\mathrm{rank}Z_2=n_1$，则系统(1.1)～(1.3)在区间$[0,T]\backslash(\tau_0,\tau_1)$上是能观的.

上述定理4.1，4.2和推论4.1的证明类同一般变量系统和推论3.1.

参 考 文 献

[1] Krener, A. J. Acausal Realiation Theory, Part 1: Linear Deterministic Systems. SIAM. J. Control and Optimization, 1987, 25(3): 499—525

[2] Xi Hongsheng and Yang Xiaoxian. Controllability, Observability and Duality of Boundary Value Linear Systems. J. USTC, 1989, 19(3): 22—31

[3] Nikoukhah, R., Willsky, A. S. and Levy, B. C.. Boundary Value Descriptor Systems: Well-Posedness, Reachability and Observability. Int. J. Control, 1987, 46(5): 1715—1737

[4] Nikoukhah, R., Willsky, A. S. and Levy, B. C.. Reachability, Observability, Minimality and Extendibility for Two-Point Boundary-Value Descriptor Systems. Int. J. Control, 1991, 54(3): 635—663

[5] 奚宏生. 连续时间广义边值系统的状态结构. 控制理论与应用, 1993, 10(6): 692—697

[6] Elizabeth, L. Yip and Richard, F.. Sincove, Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems. IEEE. Tran. Automat. Contr., 1981, AC-26(3): 702—707

[7] 张金水. 广义系统经济控制理论. 北京: 清华大学出版社, 1990

Controllability and Observability for a Class of Continuous-Time BoundaryValue Descriptor Systems

XI Hongsheng

(Department of Automation, University of Science and Technology of China·Hefei, 230026, PRC)

Abstract: A class of continuous-time boundary value descriptor systems is described as $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, with the boundary condition $V_0x(0)+V_Tx(T)=v$. E is a singular matrix and $u(t)$ is a function differentiable sufficiently many times. In this paper, we discuss the two notions of recursion, namely inward and outward boundary value processes, and give definitions and criteria of controllability and observability, associated with these processes.

Key words: boundary value descriptor systems; inward and outward boundary value processes; controllability and observability

本文作者简介

奚宏生　1950年生. 毕业于中国科技大学数学系，理科硕士，现任中国科学技术大学自动化系副教授. 在现代控制理论及应用方面发表学术论文二十余篇，目前从事边值系统和鲁棒控制设计等方面的研究工作.