第 11 卷第 3 期
1994 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 3
Jun., 1994

时滞系统的变结构控制及其实现问题*

郑 锋 程 勉 高为炳
(北京航空航天大学第七研究室·北京,100083)

摘要：本文研究时滞系统的状态观测器、变结构控制及其实现问题. 给出了一般时滞系统的状态观测器及变结构控制的设计方法，证明了当用状态观测器来实现变结构控制策略时，在一定条件下，可以保证系统的状态无限趋近于理想的滑动模态.

关键词：时滞系统；变结构控制；切换泛函；状态观测器；系统实现

1 引 言

近十多年来，变结构控制理论在各个方面得到迅速发展并得到了广泛应用[1~3]. 特别是最近，时滞系统的变结构控制受到了国内外控制工作者的关注[4~7]. 但是，目前的工作表明，为了实现时滞系统的变结构控制，必须测得系统的所有状态信息，这一要求对许多时滞系统是不现实的. 因此，有必要研究只有部分状态信息能够测量到的情况下，用状态观测器来实现变结构控制器时，系统的动态性能到底如何这一问题.

研究上述问题需要解决下面三个问题：1）时滞系统变结构控制的设计问题；2）时滞系统状态观测器的设计问题；3）在什么条件下，用状态观测器来实现相应的变结构控制策略，可以保证系统的渐近性能趋近于完全状态信息下相应系统的渐近性能. 本文下面依次研究上述问题.

2 时滞系统的变结构控制

我们在［6，7］中给出了两类特殊时滞系统的变结构控制的设计方法，这里我们给出一般时滞系统变结构控制的设计方法.

考虑如下时滞系统

$$S_d:\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\beta(\theta)u(t+\theta), \\ y(t) = \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\gamma(\theta)x(t+\theta). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)\in \mathrm{R}^n$ 表示状态变量，$u(t)\in \mathrm{R}^m$ 表示控制变量，$y(t)\in \mathrm{R}^p$ 表示量测矢量，$\alpha\in BV([-r,0],\mathrm{R}^{n\times n})$，$\beta\in BV([-r,0],\mathrm{R}^{n\times m})$，$\gamma\in BV([-r,0],\mathrm{R}^{p\times n})$，$r>0$，$BV([-r,0],\mathrm{R}^{n_1\times n_2})$表示$[-r,0]$上的有界变差实函数阵，维数为 $n_1\times n_2$，式(1)中的积分为 Stieltjes 积分. 引进记号 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$u_t(\theta)=u(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$. 假定系统(1)的初始条件为

$$x(\theta) = x_0(\theta),\quad u(\theta) = u_0(\theta),\quad \theta\in[-r,0]. \tag{2}$$

其中 $x_0\in C([-r,0],\mathrm{R}^n)$，$u_0\in C([-r,0],\mathrm{R}^m)$. 令 $u\in\Omega\subset L_1([0,\infty),\mathrm{R}^m)$，其中 Ω 表示容

---

* 国家自然科学基金资助课题.
本文于1992年12月22日收到. 1993年5月17日收到修改稿.

许控制集，据[8]，$\forall\ u\in\Omega$，存在唯一的满足初始条件(2)的函数 $x\in X\subset AC([0,\infty),\mathrm{R}^n)$，它满足(1). 这里 $AC([0,\infty],\mathrm{R}^n)$表示$[0,\infty)$上的绝对连续函数类. 定义变换 $\mathscr{T}$：

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathscr{T}(x,u)(t) \\ &= x(t) + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T} + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}. \end{aligned} \tag{3}$$

显然 $z\in AC([0,\infty),\mathrm{R}^n)$，因而几乎处处可微. 微分(3)之右端，并利用(1)，容易证明[9]，当阵 A 满足

$$A = \int_{-r}^{0} e^{A\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta) \tag{4}$$

时，有

$$\dot z(t) = Az(t) + Bu(t). \tag{5}$$

其中 $B=\int_{-r}^{0} e^{A\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)$. 可以证明[9]，在条件(4)下，$\{z(t),t\geqslant 0\}$满足(5)当且仅当$\{x(t),t\geqslant 0\}$满足(1).

矩阵 A 称为系统(1)的(左)特征矩阵. 关于特征矩阵的存在性及解法，参见[9,10].

对系统(1)，我们作如下假设：

假设 1 系统(1)谱能控.

假设 2 系统(1)存在特征矩阵 A.

假设 3 矩阵 B 列满秩.

引理 1[9] 若假设1及假设2成立，则系统(5)完全能控.

因矩阵 B 列满秩，故存在非奇异矩阵 T，使得

$$TB = [0 \quad I_m]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

这里 I_m 表示 m 阶单位阵. 作变换

$$\bar z = Tz = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \bar z_1 \\ \bar z_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中 $T_1\in\mathrm{R}^{(n-m)\times n}$，$T_2\in\mathrm{R}^{m\times n}$，$\bar z_1\in\mathrm{R}^{n-m}$，$\bar z_2\in\mathrm{R}^m$，. 令

$$\bar A = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar A_{11} & \bar A_{12} \\ \bar A_{21} & \bar A_{22} \end{bmatrix}.$$

其中 $\bar A_{11},\bar A_{12},\bar A_{21},\bar A_{22}$分别为$(n-m)\times(n-m)$，$(n-m)\times m$，$m\times(n-m)$，$m\times m$ 维矩阵. 则系统(5)化为

$$\dot{\bar z}_1 = \bar A_{11}\bar z_1 + \bar A_{12}\bar z_2, \tag{8}$$

$$\dot{\bar z}_2 = \bar A_{21}\bar z_1 + \bar A_{22}\bar z_2 + u. \tag{9}$$

容易证明，当矩阵对(A,B)能控时，矩阵对$(\bar A_{11},\bar A_{12})$亦能控. 因此由假设 1，对子系统(8)，可构造反馈律

$$\bar z_2 = -K\bar z_1 \tag{10}$$

使得子系统(8)渐近稳定，特别地，我们取 K，使得 $\sigma(\bar A_{11}-\bar A_{12}K)\subset C_{-v_0}^{-}$，这里 $C_{-v_0}^{-}\overset{\mathrm{def}}{=}\{s\in\mathscr{C}:\mathrm{Re}(s)<-v_0\}$，$v_0$ 为某一给定正数，$\mathscr{C}$ 表示复平面或复数域. 从而对系统(8)，(9)，可取切换函数

$$s = \bar z_2 + K\bar z_1 = [K, I_m]\bar z \overset{\mathrm{def}}{=} \bar C\bar z. \tag{11}$$

当系统(8)，(9)到达滑动流形$\{\bar z\in\mathrm{R}^n:\bar C\bar z=0\}$并在其上运动时，它是渐近稳定的.

将(3),(7)代入(11)得系统(1)的切换泛函:

$$s(t)=C[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}]$$

$$=C[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(t+\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}] \quad (12)$$

其中 $C\overset{\text{def}}{=}\overline{C}T$. 由(6),(7)及(11)可得

$$\dot{s}(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=CA[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}]+u(t). \quad (13)$$

取等速趋近控制律[11],即令 $\dot{s}(t)=-\varepsilon\mathrm{sgn}s(t).$ (14)

式中 $\varepsilon=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_i>0$, $\mathrm{sgn}s=[\mathrm{sng}s_1\ \mathrm{sng}s_2\ \cdots\ \mathrm{sng}s_m]^{\mathrm{T}}$. 联立(13)及(14),可得变结构控制器:

$$u(t)=-CA[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}]-\varepsilon\mathrm{sgn}s(t). \quad (15)$$

注 1 由(12)及(15)可以看出,切换泛函及控制器的表达式为一隐式关系,在实际实现这一系统时,可将(12),(15)作如下近似

$$s(t)=C[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(t-\Delta T+\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}],$$
$$u(t)=-CA[x(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(t-\Delta T+\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}]-\varepsilon\mathrm{sgn}s(t).$$

其中 ΔT 为采样时间. 我们对一火箭发动机燃烧过程镇定的仿真表明,当 ΔT 较小时,上述近似可以获得满意的结果.

下面讨论闭环系统(1),(15)的稳定性. 为此,定义系统(1)的不稳定谱 $\sigma_{us}(S_d)$ 为

$$\sigma_{us}(S_d)=\{s\in\mathscr{C}:\det\Delta(s)=0,\ \mathrm{Re}(s)\geqslant-\nu_0\}.$$

其中 $\Delta(s)=sI-\int_{-r}^{0}e^{s\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)$. 相应地,定义系统(1)的稳定谱 $\sigma_s(S_d)$ 为

$$\sigma_s(S_d)=\sigma(S_d)\backslash\sigma_{us}(S_d),$$

其中 $\sigma(S_d)=\{s\in\mathscr{C}:\det\Delta(s)=0\}$.

定理 1 如果 $\sigma_{us}(S_d)\subset\sigma(A)$, $\sigma(A)$ 表示矩阵 A 的谱,则采用变结构控制策略(15),闭环系统(1),(15)渐近稳定.

证 证明分为两步:i) 证明系统到达滑动模态后,将有 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$. ii) 证明系统在到达过程中, $|x_i(t)|(i=1,2,\cdots,n)$ 有界.

i) 由(14)可知,系统将在有限时间内到达滑动模态,设到达时间为 t_r,则当 $t>t_r+h$ 时,控制取值于等价控制:

$$u(t)=u_{eq}(t)=-CAz(t)$$

$$= -CA\left[x(t) + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T} + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u_{eq}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\right].$$

相应地，方程(8)，(9)则化为

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K)\bar{z}_1, \quad \bar{z}_2 = -K\bar{z}_1.$$

由 K 阵的选取可知，$\lim_{t\to\infty}\bar{z}(t)=0$，因而 $\lim_{t\to\infty}z(t)=0$. 特别地，$z(t)$的 Laplace 变换 $Z(s)$ 将具有形式：

$$Z(s) = \frac{b_z(s)}{a_z(s)}, \quad a_z(s) = \prod_{j=1}^{n-m}(s - s_j), \quad \mathrm{Re}(s_j) < -v_0, \quad j = 1,2,\cdots,n-m.$$

其中 $b_z(s)$为 n 维列向量，其每个分量均为 s 的多项式. 因而 $u(t)=-CAz(t)$的 Laplace 变换 $U(s)$具有形式：$U(s)=\dfrac{b_u(s)}{a_z(s)}$，这里 $b_u(s)$为 m 维列向量，其每个分量亦为 s 的多项式. 记 $x(t)$的 Laplace 变换为 $X(s)$，对(3)的两边进行 Laplace 变换可得

$$X(s) = (\Gamma_1(s))^{-1}[Z(s) - \Gamma_2(s)U(s)]. \tag{16}$$

其中 $\Gamma_1(s) = sI - \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{A(\theta-\mathscr{T})}e^{s\mathscr{T}}\mathrm{d}\mathscr{T}\mathrm{d}\alpha(\theta)$，$\Gamma_2(s) = \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} e^{A(\theta-\mathscr{T})}e^{s\mathscr{T}}\mathrm{d}\mathscr{T}\mathrm{d}\beta(\theta)$. 注意到 A 的定义式(4)，经过简单计算可得：$\Gamma_1(s)=(sI-A)^{-1}\Delta(s)$于是(16)化为

$$X(s) = \Delta^{-1}(s)(sI - A)[Z(s) - \Gamma_2(s)U(s)].$$

显然 $\Gamma_2(s)$是解析的，因而 $\Gamma_2(s)$不含任何极点. 由于 $\sigma_{us}(S_d)\subset\sigma(A)$，于是有

$$\mathrm{pole}(X) \subset \mathrm{pole}(Z) \cup \sigma_s(S_d) \subset C^-_{-v_0}.$$

这里 pole(·)表示变元的极点集. 因而有 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$.

ii) 在到达过程，即 $t\in[0,t_r+h]$，系统运动的微分方程为

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\mathscr{T})u(t+\mathscr{T}), \tag{17}$$

$$u(t) = -F\left[x(t) + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T} + \int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\right] + f(t). \tag{18}$$

其中 $F=CA$，$f(t)=[\pm\varepsilon_1,\pm\varepsilon_2,\cdots,\pm\varepsilon_m]^{\mathrm{T}}$. 相应地，系统(5)为

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t),\\ u(t) &= -Fz(t) + f(t).\end{aligned} \tag{19}$$

系统(19)为一线性系统外加一个驱动项 $f(t)$，由于，$|f_i(t)|\leqslant\bar{\varepsilon}$，$i=1,2,\cdots,m$，其中 $\bar{\varepsilon}=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\}$. 故在$[0,t_r+h]$内，$|z_i(t)|$有界，因而$|u_i(t)|$有界，记此界为 P，即

$$|u_i(t)| \leqslant P, \quad i = 1,2,\cdots,m, \quad t \in [0, t_r + r].$$

式(17)可等价地表为

$$x(t) = x(0) + \int_{0}^{t}\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)x(\mathscr{T}+\theta)\mathrm{d}\mathscr{T} + \int_{0}^{t}\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\beta(\theta)u(\mathscr{T}+\theta)\mathrm{d}\mathscr{T}. \tag{20}$$

定义　$|\varphi| = \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|, \quad \forall\, \varphi \in C([-r,0],\mathrm{R}),$

$$\bar{\alpha}_{ij} = \bigvee_{-r}^{0}(\alpha_{ij}), \quad \bar{\beta}_{ij} = \bigvee_{-r}^{0}(\beta_{ij}),$$

$$\bar{\alpha} = \max\{\bar{\alpha}_{ij}: i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots n\}, \quad \bar{\beta} = \max\{\bar{\beta}_{ij}: i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots m\}.$$

这里$\bigvee\limits_{-r}^{0}(\cdot)$表示函数在区间$[-r,0]$上的总变分. 由(20)可得

$$|x_i(t)|\leqslant|x_i(0)|+\int_0^t\Big|\int_{-r}^0\sum_{j=1}^n\mathrm{d}\alpha_{ij}(\theta)x_j(\mathscr{T}+\theta)\Big|\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_0^t\Big|\int_{-r}^0\sum_{j=1}^m\mathrm{d}\beta_{ij}(\theta)u_j(\mathscr{T}+\theta)\Big|\mathrm{d}\mathscr{T}$$

$$\leqslant|x_i(0)|+\int_0^t\sum_{j=1}^n\bar{\alpha}_{ij}|x_{j\mathscr{T}}|\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_0^t\sum_{j=1}^m\bar{\beta}_{ij}P\mathrm{d}\mathscr{T}$$

$$\leqslant|x_i(0)|+m\bar{\beta}Pt+\int_0^t\bar{\alpha}\sum_{j=1}^n|x_{j\mathscr{T}}|\mathrm{d}\mathscr{T},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

上述不等式对所有的$t\in[0,t_r+h]$均成立. 故

$$|x_{it}|\leqslant|x_i(0)|+m\bar{\beta}Pt+\int_0^t\bar{\alpha}\sum_{j=1}^n|x_{j\mathscr{T}}|\mathrm{d}\mathscr{T},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

令$\|x_t\|=\sum\limits_{i=1}^n|x_{it}|$,则由上式可得

$$\|x_t\|\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i(0)|+mn\bar{\beta}Pt+\int_0^t\bar{\alpha}n\|x_{\mathscr{T}}\|\mathrm{d}\mathscr{T}.$$

由[8]中§1.3的引理3.1可得

$$\|x_t\|=\Big[\sum_{i=1}^n|x_i(0)|+mn\bar{\beta}Pt\Big]e^{\bar{\alpha}nt}.$$

因而$|x_i(t)|(i=1,2,\cdots,n)$在$[0,t_r+h]$内有界. 证毕.

至此,我们得到了一般时滞变结构控制系统的设计方法.

3 时滞系统的状态观测器

迄今为止,对时滞系统的状态估计问题研究得还远远不够,所得的结果亦不完善,见[12,13]及其中参考文献. 最近,Fiagbedzi 与 Pearson[12,13]利用泛函空间中的状态变换发现了时滞系统状态观测器的较为方便的构造性设计方法,但文[12,13]的结果只适用于系统的不稳定特征根均为单根这一简单情形. 这里我们给出一般情况下系统(1)的状态观测器的设计方法.

对系统(1),定义其右特征矩阵A_r为下述矩阵方程的解

$$A_r=\int_{-r}^0\mathrm{d}\alpha(\theta)e^{A_r\theta}.\tag{21}$$

定义矩阵H为$H=\int_{-r}^0\mathrm{d}\gamma(\theta)e^{A_r\theta}$.

对系统(1),我们再补充如下假设:

假设 4 系统(1)谱能观测.

假设 5 系统(1)存在右特征矩阵A_r.

引理 2[13] 若假设4及假设5成立,则矩阵对$\{H,A_r\}$能观测.

定理 2[13] 若假设4及假设5成立,并且$\sigma_{us}(S_d)\subset\sigma(A_r)$. 构造如下系统:

$$\hat{S}_d:\quad\dot{\hat{x}}(t)=\int_{-r}^0\mathrm{d}\alpha(\theta)\hat{x}(t+\theta)+\int_{-r}^0\mathrm{d}\beta(\theta)u(t+\theta)$$

$$+Lw(t)+\int_{-r}^0\int_\theta^0\mathrm{d}\alpha(\theta)e^{A_r\alpha}Lw(t+\theta-\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T},\tag{22}$$

$$w(t)=-\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}\mathrm{d}\gamma(\theta)e^{A_r\mathscr{T}}Lw(t+\theta-\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}+y(t)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\gamma(\theta)\hat{x}(t+\theta). \quad (23)$$

如果 $\sigma(A_r-LH)\subset C^-_{-\nu_0}$，则有 $\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=x(t)$.

其证明参见[13]，此处从略. 但这里我们指出观测器的衰减率. 定义观测器误差 $\tilde{x}(t)$ 为 $\tilde{x}(t)\overset{\mathrm{def}}{=}x(t)-\hat{x}(t)$，则由(1)及(22)得：

$$\widetilde{S}_d:\dot{\tilde{x}}(t)=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)\tilde{x}(t+\theta)-Lw(t)-\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}\mathrm{d}\alpha(\theta)e^{A_r\theta}Lw(t+\theta-\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}. \quad (24)$$

利用(21)可得闭环系统(24)，(23)的特征多项式 $\det\widetilde{\Delta}(s)$ 为

$$\det\widetilde{\Delta}(s)=\frac{\det\Delta(s)\det(sI-A_r+LH)}{\det(sI-A_r)},$$

因而闭环系统(24)，(23)的谱 $\sigma(\widetilde{S}_d)$ 为

$$\sigma(\widetilde{S}_d)=(\sigma(S_d)\backslash\sigma(A_r))\cup\sigma(A_r-LH)\subset C^-_{-\nu_0}.$$

于是由[8]可知，对任意的 $\tilde{x}_0\in C([-r,0],\mathrm{R}^n)$，$w_0\in C([-r,0],\mathrm{R}^p)$，存在正数 E_1，使得

$$\|\tilde{x}(t)\|_v\leqslant E_1e^{-\nu_0 t}. \quad (25)$$

这里 $\|\cdot\|_v$ 表示 R^n 中的任一向量范数.

定理 2 表明，为了构造系统(1)的观测器，关键在于求解满足条件 $\sigma(A_r)\supset\sigma_{us}(S_d)$ 的右特征矩阵. 文[13]给出了系统(1)的不稳定特征根均为单根的条件下右特征矩阵的解法. 这里我们给出一般情形下右特征矩阵的解法.

设 $\Lambda=\{s_k:k=1,2,\cdots,l\}\subset\sigma(S_d)$ 为复平面上的对称集. $\forall\ s_k\in\Lambda$，定义矩阵 $A_{s_k}=\int_{-r}^{0}e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)$. 设 s_k 在 $\sigma(S_d)$ 中的代数重复度为 n_k，对矩阵 A_{s_k} 的几何重复度为 p_k. 于是矩阵 A_{s_k} 对应于特征值 s_k 将有 p_k 个独立右特征向量，记为 $\bar{v}^k_j$，$j=1,2,\cdots,p_k$，显然它们也是系统(1)的对应于 s_k 的右特征向量. 设矩阵 A_{s_k} 关于特征值 s_k 的链头为 $\bar{v}^k_j$ 的根向量链的链长为 q_{kj}. 由[14]知 $\Sigma^{p_k}_{j=1}q_{kj}=n_k$. 我们进一步假定 $\Sigma^l_{k=1}n_k=n$. 定义矩阵

$$\Delta^{(s_k)}=\int_{-r}^{0}e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)-s_kI,\quad k=1,2,\cdots,l,$$

$$\Delta^{(s_k)}_j=\frac{1}{j!}\int_{-r}^{0}\theta^je^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta),\quad k=1,2,\cdots,l;j\geqslant 1.$$

定理 3　假设 $\Sigma^l_{k=1}n_k=n$，如果下述关于 $\bar{v}^k_{j,i}$，$(k=1,2,\cdots,l;j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj})$ 的代数方程有解

$$\begin{cases}\Delta^{(s_k)}\bar{v}^k_{j,1}=0,\\ \Delta^{(s_k)}\bar{v}^k_{j,2}=[I-\Delta^{(s_k)}_1]\bar{v}^k_{j,1},\\ \Delta^{(s_k)}\bar{v}^k_{j,3}=[I-\Delta^{(s_k)}_1]\bar{v}^k_{j,2}-\Delta^{(s_k)}_2\bar{v}^k_{j,1},\\ \qquad\vdots\\ \Delta^{(s_k)}\bar{v}^k_{j,q_{kj}}=[I-\Delta^{(s_k)}_1]\bar{v}^k_{j,q_{kj}-1}-\sum\limits_{i=2}^{q_{kj}-1}\Delta^{(s_k)}_i\bar{v}^k_{j,q_{kj}-i},\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,l,\quad j=1,2,\cdots,p_k. \quad (26)$$

且向量组 $\{\bar{v}^k_{j,i}:k=1,2,\cdots,l;j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立，则系统(1)必有右特征矩阵 A_r，使得 $\sigma(A_r)=\Lambda$.

该定理的证明类似于[10]中定理1的证明，这里从略，但我们给出 A_r 的解法. 令

$$\overline{Q}_j^k \stackrel{\text{def}}{=} [\bar{v}_{j,1}^k \quad \bar{v}_{j,2}^k \quad \cdots \quad \bar{v}_{j,q_{kj}}^k] \in \mathscr{C}^{n\times q_{kj}}, \quad J_j^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} s_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_k \end{bmatrix} \in \mathscr{C}^{q_{kj}\times q_{kj}},$$

$$\overline{Q}^k = [\overline{Q}_1^k \quad \overline{Q}_2^k \quad \cdots \quad \overline{Q}_{p_k}^k], \quad k = 1,2,\cdots,l,$$

$$J^k = \text{block diag}\{J_1^k,\ J_2^k,\ \cdots,\ J_{p_k}^k\}, \quad k = 1,2,\cdots,l,$$

$$\overline{Q} = [\overline{Q}^1 \quad \overline{Q}^2 \quad \cdots \quad \overline{Q}^l], \quad J = \text{block diag}\{J^1,\ J^2,\ \cdots,\ J^l\}.$$

则 $A_r=\overline{Q}J\overline{Q}^{-1}$即为所求.

注 2 $\Sigma_{s_k\in\sigma_{us}(S_d)}n_k\leqslant n$ 时,可利用定理3来求解系统(1)的满足条件 $\sigma(A_r)\supset\sigma_{us}(S_d)$的右特征矩阵,这只需在定理3中令 $\Lambda=\sigma_{us}(S_d)\cup\sigma'_s(S_d)$即可,这里 $\sigma'_s(S_d)$为 $\sigma(S_d)$中的某些能观稳定谱点,在 Λ 中添加 $\sigma'_s(S_d)$是为了使 Λ 中的元素满足条件 $\Sigma_{s_k\in\Lambda}n_k=n$. 当 $\Sigma_{s_k\in\Lambda}n_k>n$ 时,可利用[13]中的扩维变换方法与定理3结合来设计相应的观测器.

4 时滞系统变结构控制的观测器实现

现在我们利用 $x(\cdot)$的估计量 $\hat{x}(\cdot)$来实现变结构控制策略(15). 相应的切换泛函及控制策略为

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= C\Big[\hat{x}(t) + \int_{-r}^0\int_{t+\theta}^t e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)\hat{x}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T} \\ &\quad + \int_{-r}^0\int_{t+\theta}^t e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)\bar{u}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\Big], \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= -CA\Big[\hat{x}(t) + \int_{-r}^0\int_{t+\theta}^t e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)\hat{x}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T} \\ &\quad + \int_{-r}^0\int_{t+\theta}^t e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)\bar{u}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\Big] - \varepsilon\mathrm{sgn}\hat{s}(t). \end{aligned} \tag{28}$$

式(1)及(22)中的 u 亦应以 $\bar{u}$ 代入,此处不再重写.

对闭环系统(1),(22),(23),(27),(28),我们有

定理 4 令 $\Gamma(s) = \int_{-r}^0 e^{s\theta}\mathrm{d}\gamma(\theta)$, $\Delta_\infty(s) = sI - A_r + LH - L\Gamma(s)$.

记 $\sigma(\Delta_\infty)=\{s\in\mathscr{C}:\det\Delta_\infty(s)=0\}$. 如果定理1,定理2中的条件满足,并且 $\sigma(\Delta_\infty)\subset C^-_{-v_0}$,则采用变结构控制策略(28),可使系统(1)的状态依指数率无限趋近于原点.

证 首先我们证明 $\hat{s}(t)$将在有限时间内到达原点. 由(27)及(28)可得:

$$\dot{\hat{s}}(t) = C\Big[Lw(t) + \int_{-r}^0\int_\theta^t \mathrm{d}\alpha(\theta)e^{A_r\theta}Lw(t+\theta-\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\Big] - \varepsilon\mathrm{sgn}\hat{s}(t). \tag{29}$$

令
$$\overline{w}(t) = Lw(t) + \int_{-r}^0\int_\theta^0 \mathrm{d}\alpha(\theta)e^{A_r\theta}Lw(t+\theta-\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}. \tag{30}$$

由(24),(23)及上式可知,$\tilde{x}(t)$,$w(t)$,$\overline{w}(t)$均与具有非线性性质的控制 u 无关,因而可对其进行 Laplace 变换. 分别记 $\overline{w}(t)$,$w(t)$及 $\tilde{x}(t)$的 Laplace 变换为 $\overline{W}(s)$,$W(s)$及 $\widetilde{X}(s)$,则由(23)可得

$$W(s) + [H - \Gamma(s)](sI - A_r)^{-1}LW(s) = \Gamma(s)\widetilde{X}(s), \tag{31}$$

由(30) 可得
$$\overline{W}(s) = \Delta(s)(sI - A_r)^{-1}LW(s), \tag{32}$$

联立(31)及(32)可得　　$\overline{W}(s)=\Delta(s)\Delta_{\infty}^{-1}(s)\Gamma(s)\widetilde{X}(s).$

$\Gamma(s)$为 s 的解析函数，因而不含极点. 故 $\overline{W}(s)$的极点由 $\widetilde{X}(s)$及 $\Delta_{\infty}^{-1}(s)$的极点组成，即

$$\mathrm{pole}(\overline{W})\subset\mathrm{pole}(\hat{X})\cup\sigma(\Delta_{\infty})\subset C_{-\nu_0}^{-}. \tag{33}$$

于是存在正数 E_2，使得　　$|\overline{w}(t)|\leqslant E_2e^{-\nu_0 t}.$　　(34)

由(34)，(29)及(30)可知，存在正数 $T_1>0$，使得当 $t>T_1$ 时，有

$$\dot{\hat{s}}_i(t)=\begin{cases}-\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\overline{w}_j(t)<-\frac{1}{2}\varepsilon_i, & \text{当 } \hat{s}_i(t)>0,\\ +\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\overline{w}_j(t)<+\frac{1}{2}\varepsilon_i, & \text{当 } \hat{s}_i(t)<0,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,p.$$

其中 c_{ij}为矩阵 C 的元：$C=[c_{ij}]_{m\times n}$. 根据变结构控制原理，$\hat{s}(t)$必在有限时间内到达零并保持在零，即存在 $T_2>T_1$，使得当 $t>T_2$ 时，有

$$\hat{s}(t)\equiv[0\ 0\ \cdots\ 0]^{\mathrm{T}},\quad t>T_2.$$

此时控制将取值于等价控制，即

$$\bar{u}(t)=-CA\Big[\hat{x}(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)\hat{x}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)\bar{u}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}\Big],\quad t>T_2. \tag{35}$$

下面我们考虑 $t>T_2$ 后 $\hat{x}$ 的渐近性态. 令

$$\hat{z}(t)=\hat{x}(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\alpha(\theta)\hat{x}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\mathscr{T})}\mathrm{d}\beta(\theta)\bar{u}(\mathscr{T})\mathrm{d}\mathscr{T}. \tag{36}$$

对(36)进行微分并利用(22)，(23)及(35)可得

$$\dot{\hat{z}}(t)=A\hat{z}(t)+B\bar{u}(t)+\overline{w}(t)=(A-BCA)\hat{z}(t)+\overline{w}(t).$$

基于与定理1第 i)步同样的论证，我们有

$$\hat{Z}(s)=\frac{b_1(s)}{a_z(s)}+\frac{b_2(s)\overline{W}(s)}{a_z(s)},\quad \overline{U}(s)=-CA\hat{Z}(s). \tag{37}$$

其中 $b_1(s)$，$b_2(s)$分别为 s 的 $n\times1$，$n\times n$ 多项式矩阵，它们与 $\hat{z}(t)$的初始条件有关，$a_z(s)$已在定理 1 的证明中定义. 由(33)及 $a_z(s)$的表达式知：$\mathrm{pole}(\hat{Z})\subset C_{-\nu_0}^{-}$，$\mathrm{pole}(\overline{U})\subset\mathrm{pole}(\hat{Z})$. 由(36)可得 $\hat{X}(s)=\Delta^{-1}(s)(sI-A)[\hat{Z}(s)-\Gamma_2(s)\overline{U}(s)]$. 于是有 $\mathrm{pole}(\hat{X})\subset\sigma_s(S_d)\cup\mathrm{pole}(\hat{Z})\subset C_{-\nu_0}^{-}$. 从而存在正数 E_3，使得 $\|\hat{x}(t)\|_v\leqslant E_3e^{-\nu_0 t}$，$t>T_2$. 于是

$$\|\hat{x}(t)\|_v=\|\hat{x}(t)+\tilde{x}(t)\|_v\leqslant\|\hat{x}(t)\|_v+\|\tilde{x}(t)\|_v\leqslant(E_1+E_3)e^{-\nu_0 t},\quad t>T_2.$$

证毕.

注 3　当量测变量无时滞时，有 $\Gamma(s)=0$，此时定理 4 中的条件 $\sigma(\Delta_{\infty})\subset C_{-\nu_0}^{-}$自动满足. 在这种情况下，控制器的设计与观测器的设计可以独立进行，即满足分离原理. 而当输出变量存在时滞时，为了用状态观测器来实现变结构控制器，则在设计观测器时，L 的设计不仅要使得 $\sigma(A_r-LH)\subset C_{-\nu_0}^{-}$，而且还要满足 $\sigma(\Delta_{\infty})\subset C_{-\nu_0}^{-}$. 后一要求是输出变量具有时滞的变结构控制系统所特有的.

参 考 文 献

[1] Hung, J. Y., Gao, W. B. and Hung, J. C.. Variable Structure Control: A Survey. IEEE Trans. on Industrial Elec-

tronics, 1993, 40:2—22
[2] 高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科技出版社,1990
[3] 苏春翌,周其节.变结构控制系统的理论及其应用.控制理论与应用,1990,7(1):1—11
[4] Jafarov, E. M.. Analysis and Synthesis of Multidimensional SVS with Delays in Sliding-Modes. in Proc. 11th IFAC World Congress, 1990, Munich, 6:46—49
[5] 胡跃明,周其节.带有滞后影响的控制系统的变结构控制.自动化学报,1991,17:587—591
[6] 郑锋,程勉,高为炳.控制存在时滞的系统的变结构控制.控制与决策,1993,8:95—100
[7] 郑锋,程勉,高为炳.一类时滞线性系统的变结构控制.自动化学报
[8] Hale, J. K.. Theory of Functional Differential Equation. New York:Springer-Verlag, 1977
[9] Fiagbedzi, Y. A. and Pearson, A. E.. A Multistage Reduction Technique for Feedback Stabilizing Distributed Time-Lag Systems. Automatica, 1987, 23:311—326
[10] 郑锋,程勉,高为炳.分布时滞系统的反馈镇定.自动化学报
[11] 高为炳,程勉.变结构控制的品质控制.控制与决策,1989,4(1):1—6
[12] Fiagbedzi, Y. A. and Pearson, A. E.. An Exponential State Observer for Time-Lag Systems. Int. J. Control, 1990, 51:189—204
[13] Fiagbedzi, Y. A. and Pearson, A. E.. A State Observer for Systems Described by Functional Diddferential Equations. Automatica, 1990, 26:321—331
[14] 黄琳.系统与控制理论中的线性代数.北京:科学出版社,1984

Variable Structure Control of Time-Delay Systems and Its Implementation

ZHENG Feng, CHENG Mian and GAO Wingbing

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics · Beijing, 100083, PRC)

Abstract: This paper deals with the design problem of exponential state observer and variable structure control of linear time-delay systems and the implementation method of the controller with the observer. The design methods of the observer and variable structure control are presented. The condition under which the motion of the variable structure control system implemented by the observer will approach the ideal sliding mode is given.

Key words: retarded systems; state observer; variable structure contorl; switching functional; system implementation

本文作者简介

郑 锋 1963年生.1987年1月毕业于西北电讯工程学院,获工学硕士学位,此后在桂林电子工业学院工作三年,1990年至1993年为北京航空航天大学第七研究室博士生.目前在清华大学电机工程系做博士后研究.研究领域为随机系统,时滞系统及变结构控制等.

程 勉 1933年生.1953年毕业于北京航空学院,分别于1958年,1980,1986年任该院讲师、副教授、教授,1990年任自动控制理论及应用学科博士生导师.学术兴趣为一般力学,非线性振动与控制,机器人动力学与控制,变结构控制,智能控制等.1993年6月不幸逝世.

高为炳 1925年生.1948年毕业于西北工学院航空系,1951年任清华大学讲师,1956年任北京航空学院副教授,1978年任教授,1981年任自动控制理论及应用学科博士生导师,1992年任中国科学院学部委员.在一般力学,非线性系统,运动稳定性,大系统,机器人动力学控制,变结构控制,智能控制,航空航天控制等研究领域内均有重要建树.1994年3月不幸逝世.