单滞后区间动力系统的稳定性*

张银萍　孙继涛
(华东冶金学院·安徽马鞍山,243002)

摘要: 本文研究如下单滞后时变区间动力系统 $\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\tau\geqslant 0$ 的渐近稳定性和 α 稳定性,给出了其渐近稳定和 α 稳定的充分条件,推广和改进了文[1,2]的工作.

关键词: 滞后区间系统; 渐近稳定; α 稳定

关于区间矩阵的稳定性曾被广泛研究[3~7],但具有滞后的区间动力系统的研究并不多见[1]. 文[1,2]在一定条件下研究了下列单滞后区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C,D]x(t-\tau),\tau\geqslant 0$$

的稳定性问题. 本文用矩阵测度研究更广一类的单滞后区间动力系统的稳定性,即滞后项的系数矩阵可以是时变区间矩阵 $N[C(t),D(t)]$ 的情形.

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\tau\geqslant 0 \tag{1}$$

给出了其渐近稳定和 α 稳定的充分条件,推广和改进了文[1,2]的工作.

定义　如果对任意给定的 $A\in N[P,Q]$ 和 $B(t)\in[C(t),D(t)]$,系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B(t)x(t-\tau),\quad \tau\geqslant 0 \tag{2}$$

的零解是渐近稳定的,则称具有单滞后的时变区间动力系统(1)是渐近稳定的,记为 $[P,Q;C(t),D(t)]\in SS$.

定义　设 α 是某个正常数,如存在一个正常数 K,使得对任意给定的 $A\in N[P,Q]$,$B(t)\in[C(t),D(t)]$ 和 $\varphi(t)\in C([-\tau,0],\mathrm{R}^n)$,总能使系统(2)的解满足

$$\|x(t)\|\leqslant Ke^{-\alpha t}\|\varphi\|,\quad t\geqslant 0,$$

则称具有单滞后的时变区间动力系统(1)是具有衰减度 α 指数稳定的,简称 α 稳定的. 其中 $\|\varphi\|=\sup\limits_{t\in[-\tau,0]}\|\varphi(t)\|$,而 $\varphi(t)(-\tau\leqslant t\leqslant 0)$ 是系统(2)的初始函数. 记为 $N[P,Q;C(t),D(t)]\in\alpha SS$.

定理 1　如果对任意的 $A\in N[P,Q]$ 和 $B(t)\in[C(t),D(t)]$,$\mu(A)<-\|B(t)\|$,则具有单滞后的时变区间动力系统(1)渐近稳定,即 $N[P,Q;C(t),D(t)]\in SS$.

证　对任意给定的 $A\in N[P,Q]$ 和 $B(t)\in[C(t),D(t)]$,考察系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+B(t)x(t-\tau), & t\geqslant 0,\\ x(t)=\varphi(t), & 0>t\geqslant-\tau,\end{cases} \tag{3}$$

故有 $t\geqslant 0$ 时

---

* 冶金部基础科学研究基金资助的项目.
本文于1992年11月6日收到. 1993年12月6日收到修改稿.

$$x(t)=\exp(At)x_0+\int_0^t\exp\{A(t-s)\}B(s)x(s-\tau)\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}|x(t)|&\leqslant\|\exp(At)\|\,|x_0|+\left|\int_0^t\exp\{A(t-s)\}B(s)x(s-\tau)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\|\exp(At)\|\,|x_0|+\int_0^t\|\exp A(t-s)\|\,\|B(s)\|\,|x(s-\tau)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\{\exp\mu(A)t\}|x_0|+\int_0^t\{\exp\mu(A)(t-s)\}\,\|B(s)\|\,|x(s-\tau)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

现作辅助系统

$$\begin{cases}\dot z(t)=\mu(A)z(t)+\|B(t)\|z(t-\tau), & t\geqslant 0,\\ z(0)=|x_0|,\ z(t)=|\varphi(t)|, & 0>t\geqslant-\tau.\end{cases}\tag{4}$$

注意到，标量系统(4)当 $\|B(t)\|<-\mu(A)$ 即 $\mu(A)<-\|B(t)\|$ 时，系统(4)的零解渐近稳定[8]，这样再由关于滞后微分方程的比较定理[2]，系统(4)的渐近稳定蕴含系统(3)的渐近稳定，由于 $A,B(t)$ 的任意性，具单滞后的时变区间动力系统(1)渐近稳定，即 $N[P,Q;C(t),D(t)]\in SS$. 证毕

在本文中 $\mu(A)$ 表示 A 的测度可取 μ_1 或 μ_2 或 μ_∞，$\mu_{1,\infty}(A)$ 表示 A 的测度可取 μ_1 或 μ_∞，但在同一不等式中同时出现几个 $\mu_{1,\infty}(A)$ 时表示它们同取测度 μ_1 或 μ_∞.

现记

$$\dot A=\lambda_1P+(1-\lambda_1)Q,\quad 0\leqslant\lambda_1\leqslant 1,\quad A_G=A-\dot A,\quad M=Q-P,$$

则 $\mu(A)\leqslant\mu(\dot A)+\mu(A_G)$，由 $\mu_1(A)$ 及 $\mu_\infty(A)$ 的定义知 $\mu_{1,\infty}(A_G)\leqslant max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M)$，而

$$\begin{aligned}\mu_2(A_G)&=\frac12\lambda_{\max}(A_G+A_G^{\mathrm T})\\&\leqslant\frac12\mu_{1,\infty}(A_G+A_G^{\mathrm T})\\&\leqslant\frac12\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm T}),\end{aligned}$$

故有

$$\mu_{1,\infty}(A)\leqslant\mu_{1,\infty}(\dot A)+\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M),$$

$$\mu_2(A)\leqslant\mu_2(\dot A)+\frac12\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm T}).$$

我们再用 $\|B(t)\|_{1,\infty}$ 表示 $B(t)$ 范数是 $\|B(t)\|_1$ 或 $\|B(t)\|_\infty$，而 $\|B(t)\|_1$ 与 μ_1 对应，$\|B(t)\|_\infty$ 与 μ_∞ 对应. 记 $\dot B(t)=\lambda_2C(t)+(1-\lambda_2)D(t)$, $0\leqslant\lambda_2\leqslant 1$, $B_G(t)=B(t)-\dot B(t)$, $E(t)=D(t)-C(t)=(e_{ij}(t))_{n\times n}$，则注意到 $\|\cdot\|_{1,\infty}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\|B(t)\|_{1,\infty}&\leqslant\|B_G(t)\|_{1,\infty}+\|\dot B(t)\|_{1,\infty}\\&\leqslant\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_{1,\infty}+\|\dot B(t)\|_{1,\infty}.\end{aligned}$$

若记 $B_G(t)=(\bar b_{ij}(t))_{n\times n}$，则因为 $B_G^{\mathrm T}(t)$ 中 (i,k) 的元素是 $\bar b_{ki}$，$B_G(t)$ 中 (k,j) 的元素是 $\bar b_{kj}$，故知 $B_G^{\mathrm T}B_G$ 中 (i,j) 的元素为 $\sum_{k=1}^n\bar b_{ki}\bar b_{kj}$，由文[9]知

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(B_G^{\mathrm T}B_G)&\leqslant n\max_{i,j}|B_G^{\mathrm T}B_G\text{ 中的元素 }|\\&=n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^n\bar b_{ki}\bar b_{kj}\right|.\end{aligned}$$

注意到$-(1-\lambda_2)E(t)\leqslant B_G(t)\leqslant\lambda_2 E(t)$，因此

$$\| B_G(t) \|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}(B_G^{\mathrm{T}}B_G) \leqslant \max(1-\lambda_2,\lambda_2)\sqrt{n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}}.$$

这样，由定理 1 我们得到

定理 2　如存在$\lambda_1\in[0,1]$和$\lambda_2\in[0,1]$，使得下列条件中至少有一个满足

i) $\mu_{1,\infty}(\dot{A})+\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M)<-\|\dot{B}(t)\|_{1,\infty}-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_{1,\infty}$.

ii) $\mu_2(\dot{A})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm{T}})$

$$<-\|\dot{B}(t)\|_2-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\sqrt{n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}}.$$

则具单滞后的时变区间动力系统(1)渐近稳定，即$[P,Q;C(t),D(t)]\in SS$.

注意到

$$\lambda_{\max}(B_G^{\mathrm{T}}B_G)\leqslant\min\Big[\max_i\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\bar{b}_{ki}\bar{b}_{kj}\Big|,\max_j\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\bar{b}_{ki}\bar{b}_{kj}\Big|\Big]$$

$$\leqslant[\max(1-\lambda_2,\lambda_2)]^2\min\Big[\max_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj},\max_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}\Big].$$

记$G=(g_{ij})_{n\times n}$，$g_{ij}=\max(|p_{ij}|,|q_{ij}|)$，$(i\neq j)$，$g_{ii}=q_{ii}$，　$i,j=1,2,\cdots,n$. 则对任给的$A\in N[P,Q]$，$\mu_{1,\infty}(A)\leqslant\mu_{1,\infty}(G)$，这样，我们可以得到

定理 3　如存在$\lambda_1\in[0,1]$和$\lambda_2\in[0,1]$，使得下列条件中至少有一个成立

i) $\mu_2(\dot{A})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm{T}})$

$$<-\|\dot{B}(t)\|_2-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\sqrt{\min\Big[\max_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj},\max_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}\Big]}$$

ii) $\mu_{1,\infty}(G)<-\|\dot{B}(t)\|_{1,\infty}-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_{1,\infty}$.

则具单滞后的时变区间动力系统(1)渐近稳定，即$[P,Q;C(t),D(t)]\in SS$.

下面考察单滞后时变区间动力系统(1)的α稳定性问题. 对系统(2)令$y(t)=e^{\alpha t}x(t)$，则得

$$\dot{y}(t)=(\alpha I+A)y(t)+e^{\alpha\tau}B(t)y(t-\tau),\quad \tau\geqslant 0, \tag{5}$$

显然，单滞后时变区间动力系统

$$\dot{y}(t)=N[\alpha I+P,\alpha I+Q]y(t)+N[e^{\alpha\tau}C(t),e^{\alpha\tau}D(t)]y(t-\tau),\quad \tau\geqslant 0$$

的渐近稳定性蕴含单滞后时变区间动力系统(1)的α稳定性.

由定理 1～3 可得：

定理 4　如果对任意的$A\in N[P,Q]$和$B(t)\in[C(t),D(t)]$，$\mu(A)<-\alpha-e^{\alpha\tau}\|B(t)\|$，则具有单滞后的时变区间动力系统(1)$\alpha$稳定，即$[P,Q;C(t),D(t)]\in\alpha SS$.

定理 5　如果存在$\lambda_1\in[0,1]$和$\lambda_2\in[0,1]$，使得下列条件中至少有一个满足

i)　$\mu_{1,\infty}(\dot{A})+\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M)$

$$<-\alpha-e^{\alpha\tau}\|\dot{B}(t)\|_{1,\infty}-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)e^{\alpha\tau}\|E(t)\|_{1,\infty}.$$

ii)　$\mu_2(\dot{A})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm{T}})$

$$<-\alpha-e^{\alpha\tau}\|\dot{B}(t)\|_2-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)e^{\alpha\tau}\sqrt{n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}}.$$

则具单滞后的时变区间动力系统(1)α稳定,即$[P,Q;C(t),D(t)]\in \alpha SS$.

定理 6 如存在$\lambda_1\in[0,1]$和$\lambda_2\in[0,1]$,使得下列条件中至少有一个满足

i) $\mu_2(\dot{A})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_{1,\infty}(M+M^{\mathrm{T}})$

$$<-\alpha-e^{\alpha\tau}\|\dot{B}(t)\|_2-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)e^{\alpha\tau}\sqrt{\min[\max_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj},\max_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{ki}e_{kj}]}.$$

ii) $\mu_{1,\infty}(G)<-\alpha-e^{\alpha\tau}\|\dot{B}(t)\|_{1,\infty}-\max(1-\lambda_2,\lambda_2)e^{\alpha\tau}\|E(t)\|_{1,\infty}$.

则具单滞后的时变区间动力系统(1)α稳定,即$[P,Q;C(t),D(t)]\in \alpha SS$.

例 考虑系统

$$\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\quad \tau\geqslant 0. \tag{6}$$

这里

$$P=\begin{bmatrix}-6 & -2\\ -2 & -5\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix},$$

$$C(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sin t-\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\quad D(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sin t & 0\end{bmatrix},$$

则有

$$G=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad \mu_\infty(G)=-2.$$

取$\lambda_2=\frac{1}{2}$,则又有

$$\dot{B}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sin t-\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix},\quad E(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},$$

$$\|\dot{B}(t)\|_\infty=\frac{4}{3},\quad \|E(t)\|_\infty=\frac{1}{2}.$$

故定理3的条件ii)满足,因此,具有单滞后的时变区间动力系统(6)渐近稳定.即

$$\left[\begin{bmatrix}-6 & -2\\ -2 & -5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sin t-\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sin t & 0\end{bmatrix}\right]\in SS.$$

参考文献

[1] LIAO Xiaoxin, WANG Xiaojun and FU Yuli. Stability and Decay Rate of Interval Delay Dynamical Systems. Appl. Math. —A J. of Chinese Universities, 1992, 7(3):391—402

[2] 刘永清,唐功友.大型动力系统的理论与应用.卷3,广州:华南理工大学出版社,1992

[3] 孙继涛.关于区间矩阵的稳定性.自动化学报,1991,17(6):745—748

[4] 孙继涛. 时变区间矩阵的稳定性. 应用科学学报, 1994, 12(1): 57—60

[5] Soh, C. B.. Correcting Arogoun's Approach for the Stability of Interval Matrices. Int. J. Control, 1990, 51(5): 1151—1154

[6] Heinen, J. A.. Sufficient Conditions for Stability of Interval Matrices. Int. J. C. 1984, 39(6): 1323—1328

[7] Xu, D.. Simple Criteria for Stability of Interval Matrices. Int. J. Control, 1985, 41(1): 289—295

[8] Els'gol'ts, L. E.. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Holden-Day, INC., 1966

[9] 倪国熙编. 常用的矩阵理论和方法. 上海: 上海科技出版社, 1984

Stability of Delay Interval Dynamical Systems

ZHANG Yinping and SUN Jitao

(East China Institute of Metallurgy · Anhui Ma'anshan, 243002, PRC)

Abstract: In this paper, we investigate the asymptotically stability and the exponential stability for a kind of interval delay dynamical systems: $\dot{x}(t)=N[P,Q]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\tau\geqslant 0$. The sufficient conditions of asymptotically stable and exponential stable about this system are obtained, the results of the paper [1～2] are extended and improved.

Key words: delay interval system; asymptotically stability; asymptotically stability with delay rate α

本文作者简介

张银萍　1962 年生. 1983 年 7 月在安徽大学数学系获理学学士后即在华东冶金学院数学教研室任教, 1989 年 3 月在南京理工大学获工学硕士学位. 现为华东冶金学院讲师. 目前对鲁棒控制理论较有兴趣. 近年来, 已在国内外发表学术论文近十篇.

孙继涛　1963 年生. 1983 年 7 月在南京大学数学系获理学学士后即在华东冶金学院数学教研室任教. 现为华东冶金学院副教授. 对常微分方程定性理论, 常微分方程和常微分差分方程的稳定性理论较有兴趣. 近年来, 已在国内外发表学术论文三十余篇.