

多输入多输出系统参数的集员辨识*

袁震东 徐桥南

(华东师范大学数学系·上海, 200062)

摘要: 本文讨论了多输入多输出系统参数的集员辨识(set membership identification). 在系统动态噪声功率有界的假定下导出了 MIMO 系统参数的成员集合是个椭球, 证明在一定条件下椭球趋向于一点. 文中的仿真例子验证了上述结果.

关键词: 集员辨识; 最小二乘法; 收敛性

1 引言

集员辨识是近年来在国际控制论界逐渐走红的一种系统辨识方法. 这种方法的要点是: 假定系统的噪声有界或噪声功率有界, 根据系统输入输出提供的信息, 确定一个总是包含着真参数的集合(椭球). 当采样个数趋于无限时, 椭球收敛于一点. 研究集员辨识的起因有二: 首先是在现存的绝大部分系统辨识的文献中都假定系统的噪声是随机过程且满足某种假设, 在这种情况下可以证明参数估计的收敛性, 然而一旦这些假设不满足, 辨识的收敛性就失去意义. 实际系统噪声是否满足某一假定是很难验证的, 其结果产生了下面的矛盾: 一方面承认实际系统是非常复杂的, 不一定都能用简单的系统模型作为其数学模型. 另一方面由于模型类和噪声的假定是人为的, 于是似乎所有的系统都能够通过辨识获得与真系统任意接近的模型. 正是由于这种矛盾, 促使人们考虑有界噪声时的辨识, 1979 年 Fogel^[1]和 1982 年 Fogel 和 Huang^[2]发表了这方面的结果. 研究集员辨识的第二个起因是近年来鲁棒控制的发展, 集员估计能给出参数或传递函数所属集合, 根据该集中最不利情况设计的控制器可以适用于某集合的系统, 从而获得了鲁棒控制. 关于传递函数集员估计的结果已由 Wahlberg 和 Ljung^[3]给出.

但所有上述结果都只考虑单输入单输出(SISO)系统, 本文考虑多输入多输出(MIMO)系统参数的集员辨识. 本文第二节归结多输入多输出系统参数集员辨识问题及其解. 第三节给出多变量集员辨识的收敛性. 第四节是仿真例子. 第五节是结论.

2 集员估计问题及其解

考虑下列 MIMO 线性系统

$$y_k = A_1 y_{k-1} + \dots + A_p y_{k-p} + B_1 u_{k-1} + \dots + B_q u_{k-q} + \omega_k, \quad (2.1)$$

其中 y_k 是 m 维的输出, u_k 是 l 维的输入, ω_k 是 m 维动态噪声.

记

$$\theta^T = [A_1 \dots A_p \quad B_1 \dots B_q]_{m \times (mp+lq)},$$

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1993 年 1 月 9 日收到.

$$X_k^T = [y_{k-1}^T \cdots y_{k-p}^T \quad u_{k-1}^T \cdots u_{k-q}^T]_{1 \times (mp+q)}$$

ω_k 是不可量测的噪声,其功率有界,即

$$\sum_{i=1}^k \|\omega_i\|^2 \leq F(k), \quad (2.2)$$

其中 $F(k)$ 是与 k 有关的纯量.

MIMO 线性系统(2.1)可写成回归形式

$$y_k = \theta^T X_k + \omega_k. \quad (2.3)$$

如果再记

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_k^T \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_k^T \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \vdots \\ \omega_k^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

由(2.3)和(2.4)可得

$$Y_k = \Psi_k \theta + H_k. \quad (2.5)$$

设 $\Psi_k^T \Psi_k$ 正定,即

$$\Psi_k^T \Psi_k > 0 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^k X_i X_i^T > 0. \quad (2.6)$$

如所周知,最小二乘估计为

$$\theta_o(k) = (\Psi_k^T \Psi_k)^{-1} \Psi_k^T Y_k = \left(\sum_{i=1}^k X_i X_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^k X_i y_i^T. \quad (2.7)$$

设

$$P_k^{-1} = \Psi_k^T \Psi_k = \sum_{i=1}^k X_i X_i^T, \quad (2.8)$$

于是

$$\theta_o(k) = P_k \sum_{i=1}^k X_i y_i^T, \quad (2.9)$$

可验证包含 θ 的椭球 θ_k 可写成:

$$\begin{aligned} \theta \in \theta_k &= \left\{ \theta : \sum_{i=1}^k \|y_k - \theta^T X_k\|^2 \leq F(k) \right\} \\ &= \left\{ \theta : \text{tr}(\theta - \theta_o(k))^T P_k^{-1} (\theta - \theta_o(k)) \leq G(k) \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中

$$G(k) = F(k) - \text{tr} Y_k^T Y_k + \text{tr} \theta_o^T(k) P_k^{-1} \theta_o(k) \quad (2.11)$$

(2.8), (2.9), (2.11) 可写成递推形式

$$\theta_o(k) = \theta_o(k-1) + \alpha_k P_{k-1} X_k [y_k^T - X_k^T \theta_o(k-1)], \quad (2.12)$$

$$P_k = P_{k-1} - \alpha_k P_{k-1} X_k X_k^T P_{k-1}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} G(k) &= G(k-1) + [F(k) - F(k-1)] \\ &\quad - \alpha_k \text{tr} [y_k - \theta_o^T(k-1)] [y_k^T - X_k^T \theta_o(k-1)], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\alpha_k = (1 + X_k^T P_{k-1} X_k)^{-1}. \quad (2.15)$$

注记 1) 由(2.10)式给出的 θ_k 是一个椭球,它以最小二乘估计 $\theta_o(k)$ 为中心,保证未知参数总落在椭球内.

2) (2.12)~(2.15)给出了椭球中心估计和 $G(k)$ 计算的递推关系式, $\theta_o(k)$ 和 P_0 可取为 $\theta_o(0)=0, P_0=\delta I$, 其中 δ 是很小的正数.

3) 在推导过程中作了假定(2.6),即 P_k^{-1} 存在, P_k^{-1} 满秩. 如果 P_k^{-1} 不满秩,则椭球退

化,此时 $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{\theta \in \theta_k} \|\theta\| = \infty$.

4) 我们可以证明,在上述的递推式中, $\theta_k \subset \theta_{k-1}$, 即包含真值的椭球越来越小.

3 收敛性分析

1979年 Fogel^[1]把 θ_k 算法的收敛性定义为: θ_k 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{\theta \in \theta_k} \|\theta - \theta_0(k)\| = 0. \quad (3.1)$$

定义 1 设 $g(k)$ 是减函数, $g(k) > 0$, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \sum_{i=1}^k \omega_i = 0, \quad (3.2a)$$

且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \sum_{i=1}^k \omega_i \omega_i^T = Q \delta(j), \quad (3.2b)$$

其中 Q 是 $m \times m$ 正定常数阵, $\delta(j)$ 是 Kronecker δ 函数, $\{\omega_i\}$ 是 m 维向量序列, 则称 $\{\omega_i\}$ 是白的.

利用下面的记号, 我们可把 (3.2) 写成

$$\sum_{i=1}^k \omega_i = o(g^{-1}(k)) e_m. \quad (3.3a)$$

其中

$$e_m^T = [1 \ \dots \ 1]_{1 \times m} \quad (3.4)$$

表示当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^k \omega_i$ 比 $g^{-1}(k) e_m$ 趋向于无穷大慢.

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \omega_i^T = \begin{cases} E_{m \times m} o(g^{-1}(k)), & j \neq 0, \\ Q O(g^{-1}(k)), & j = 0. \end{cases} \quad (3.3b)$$

这里

$$E_{m \times m} = e_m e_m^T. \quad (3.5)$$

$k \rightarrow \infty$ 时, $O(g^{-1}(k))/g^{-1}(k) \rightarrow c > 0$, Q 为 $m \times m$ 正定常数阵.

根据椭球收敛的定义可知当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\theta_0(k) \rightarrow \theta_0$ 是椭球收敛的必要条件, 下面给出 $\theta_0(k) \rightarrow \theta_0$ 的充分条件.

引理 1 若存在正函数 $g(k)$, 使得

$$i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \sum_{i=1}^k X_i \omega_i^T = 0, \quad (3.6)$$

$$ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) P_k^{-1} \geq C > 0. \quad (\text{此处 } C \text{ 为正定常数阵}) \quad (3.7)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\theta_0(k) \rightarrow \theta_0$.

证 因为

$$\begin{aligned} \theta_0(k) &= P_k \sum_{i=1}^k X_i y_i^T = P_k \left[\sum_{i=1}^k X_i X_i^T \theta_0 + \sum_{i=1}^k X_i \omega_i^T \right] \\ &= \theta_0 + (g(k) P_k^{-1})^{-1} (g(k) \sum_{i=1}^k X_i \omega_i^T), \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 (3.6) 和 (3.7) 可知当 $k \rightarrow \infty$ 时, (3.8) 式右端第二项趋近于零, 于是引理 1 得证.

引理 2 对于系统 (2.1), 系统稳定, $g(k) = O(1/k)$, 若 $\{\omega_k\}$ 是白的, 且 $\{u_k\}$ 满足

$$i) \sum_{i=1}^b \alpha_i \bar{u}_i^T = o(g^{-1}(k)) E_{m \times l_q}, \quad \forall j, \quad (3.9)$$

$$ii) \exists N > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \quad \forall m, \\ 0 < \alpha_1 I \leq \sum_{i=m}^{m+N} \bar{u}_i \bar{u}_i^T \leq \alpha_2 I < \infty. \quad (3.10)$$

其中

$$\bar{u}_i^T = [u_{i-1}^T \cdots u_{i-g}^T]_{1 \times l_q}. \quad (3.11)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\theta_o(k) \rightarrow \theta_o$.

证 设置对应于(2.1)的状态方程

$$\bar{X}_k = A \bar{X}_{k-1} + B_1 \bar{u}_{k-1} + B_2 \omega_{k-1}. \quad (3.12)$$

其中

$$\bar{X}_k^T = [y_{k-1}^T \cdots y_{k-p}^T], \quad (3.13)$$

A, B_1, B_2 是如下分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ I & & \\ & & I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_q \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

可知(3.12)是系统(2.1)的能控型实现. 且因系统稳定, 故 A 的特征值都在单位圆内.

于是

$$\|A^j\| \leq K_1 \lambda^j, \quad K_1 > 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (3.14)$$

$$\left\| \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_1 \right\| < +\infty, \quad \left\| \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_2 \right\| < +\infty. \quad (3.15)$$

由(3.12)逐次迭代有

$$\bar{X}_k = A_k \bar{X}_0 + \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_1 \bar{u}_{k-j} + \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_2 \omega_{k-j}. \quad (3.16)$$

由 $\bar{X}_k^T = [y_{k-1}^T \cdots y_{k-p}^T, u_{k-1}^T \cdots u_{k-g}^T]_{1 \times (mp+lq)}$ 知

$$\bar{X}_k^T = [\bar{X}_k^T \quad \bar{u}_k^T], \quad (3.17)$$

故

$$\bar{X}_k = \begin{bmatrix} \bar{X}_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^k \bar{X}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_1 \bar{u}_{k-j} \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_2 \omega_{k-j} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

由(3.14), (3.15), \bar{X}_0 是一确定量, 且 $g(k) = O(1/k)$, 经过一系列代数运算, 可推出(3.18)代入(3.6), (3.7)左边后含 \bar{X}_0 的项趋近于零, 当 $k \rightarrow \infty$ 时.

故对充分大的 k 不妨把(3.18)写作

$$\bar{X}_k = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_1 \bar{u}_{k-j} \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k A^{j-1} B_2 \omega_{k-j} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

为下面证明书写简便,先做一些准备工作.记

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^h A^{j-1} B_1 \bar{u}_{k-j}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^h A^{j-1} B_2 \omega_{k-j}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} g(k) \sum_{i=1}^h \beta_i \beta_i^T &= \sum_{j=1}^h (A^{j-1} B_2) g(k) \sum_{i=j}^h \omega_{k-j} \omega_{k-i}^T (A^{i-1} B_2)^T \\ &\quad + \sum_{j=1}^h \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^h (A^{j-1} B_2) g(k) \sum_{i=\max(j,m)}^h \omega_{k-j} \omega_{k-i}^T (A^{m-1} B_2)^T \\ &= \sum_{j=1}^h (A^{j-1} B_2) Q (A^{j-1} B_2)^T O(g^{-1}(k)) g(k) + \sum_{j=1}^h A^{j-1} B_2 E_{m \times m} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^h (A^{j-1} B_2)^T O(g^{-1}(k)) g(k). \end{aligned}$$

对于充分大的 $k, k > mp$, 由上式

$$\begin{aligned} g(k) \sum_{i=1}^h \beta_i \beta_i^T &= \sum_{j=1}^{mp} (A^{j-1} B_2) Q (A^{j-1} B_2)^T O(g^{-1}(k)) g(k) \\ &\quad + \sum_{j=mp+1}^h (A^{j-1} B_2) Q (A^{j-1} B_2)^T O(g^{-1}(k)) g(k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^h A^{j-1} B_2 E_{m \times m} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^h (A^{m-1} B_2)^T O(g^{-1}(k)) g(k) \\ &= C_0 O(g^{-1}(k)) g(k) + C_0(k) O(g^{-1}(k)) g(k) + C_1(k) O(g^{-1}(k)) g(k). \quad (3.21) \end{aligned}$$

其中

$$C_0 = \sum_{j=1}^{mp} (A^{j-1} B_2) Q (A^{j-1} B_2)^T = [B_2 \cdots A^{mp-1} B_2] Q [B_2 \cdots A^{mp-1} B_2]^T, \quad (3.22)$$

$$C_0(k) = \sum_{j=mp+1}^h (A^{j-1} B_2) Q (A^{j-1} B_2)^T, \quad (3.23)$$

$$C_1(k) = \sum_{j=1}^h A^{j-1} B_2 E_{m \times m} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^h (A^{m-1} B_2)^T. \quad (3.24)$$

由方程(3.12)是能控型实现,可知(3.22)给出的 C_0 为正定常数阵. 又由(3.15), (3.5)知 $C_1(k)$ 是有界阵. $C_0(k)$ 是非负定阵.

又对充分大的 k 有:

$$\sum_{i=1}^h \bar{u}_i \bar{u}_i^T = \sum_{i=1}^{1+N} \bar{u}_i \bar{u}_i^T + \sum_{i=N+2}^{2(1+N)} \bar{u}_i \bar{u}_i^T + \cdots + \sum_{i=1+([k/N]-1)(N+1)}^h \bar{u}_i \bar{u}_i^T.$$

由 $\alpha_1 I \leq \sum_{i=m}^{m+N} \bar{u}_i \bar{u}_i^T \leq \alpha_2 I$ 可推出

$$g(k) \left(\left[\frac{k}{N} \right] - 1 \right) \alpha_1 I \leq g(k) \sum_{i=1}^h \bar{u}_i \bar{u}_i^T \leq g(k) \left[\frac{k}{N} \right] \alpha_2 I. \quad (3.25)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,有

$$K_0 \alpha_1 \leq \| g(k) \sum_{i=1}^h \bar{u}_i \bar{u}_i^T \| \leq K_0 \alpha_2. \quad (3.26)$$

其中

$$K_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \left(\begin{bmatrix} k \\ N \end{bmatrix} - 1 \right),$$

$$\| \sqrt{g(k)} (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \| = \| g(k) (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \|^{1/2} = \| g(k) \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{u}_i^T \|^{1/2}.$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 由 (3.26) 及上式知

$$\begin{aligned} & \| \sqrt{g(k)} (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \| \leq \sqrt{K_0 \alpha_2}, \\ & \| \sqrt{g(k)} (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T \| \\ &= \| g(k) (\alpha_1 \cdots \alpha_k) (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T \|^{1/2} \\ &= \| \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k (A^{j-1} B_1) g(k) \sum_{i=\max(j,m)}^k \bar{u}_{i-j} \bar{u}_{i-m}^T (A^{m-1} B_1)^T \|^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k \| A^{j-1} B_1 \| \| A^{m-1} B_1 \| \| g(k) \sum_{i=\max(j,m)}^k \bar{u}_{i-j} \bar{u}_{i-m}^T \| \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k \| A^{j-1} B_1 \| \| A^{m-1} B_1 \| \| \sqrt{g(k)} (\bar{u}_{\max(j,m)-j} \cdots \bar{u}_{k-j}) \| \right. \\ &\quad \left. \cdot \| \sqrt{g(k)} (\bar{u}_{\max(j,m)-m} \cdots \bar{u}_{k-m}) \| \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

由 (3.14), (3.27) 及上式可推出, 当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\| \sqrt{g(k)} (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T \| < +\infty. \quad (3.28)$$

下面将开始验证由 (3.19) 给出的 X_k 是否满足引理 1 的条件.

将 (3.19) 代入 (3.6) 左边

$$\begin{aligned} & g(k) \sum_{i=1}^k X_i \omega_i^T \\ &= \begin{bmatrix} g(k) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i A^{j-1} B_1 \bar{u}_{i-j} \omega_i^T \\ g(k) \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \omega_i^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(k) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i A^{j-1} B_2 \omega_{i-j} \omega_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k A^{i-1} B_1 g(k) \sum_{j=1}^k \bar{u}_{i-j} \omega_j^T \\ g(k) \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \omega_i^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k A^{i-1} B_2 g(k) \sum_{j=1}^k \omega_{i-j} \omega_i^T \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

由 (3.15), (3.9) 及 (3.26) 中 $j \neq 0$ 情形可导出 $g(k) \sum_{i=0}^k X_i \omega_i^T$ 趋近于零, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 即 (3.6) 成立.

将 (3.19), (3.20) 代入 (3.7) 式

$$g(k) P_k^{-1} = g(k) \sum_{i=1}^k X_i X_i^T$$

$$\begin{aligned}
 &= g(k) \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \alpha_i \alpha_i^T & \alpha_i \bar{u}_i^T \\ \bar{u}_i \alpha_i^T & \bar{u}_i \bar{u}_i^T \end{bmatrix} + g(k) \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \alpha_i \beta_i^T & 0 \\ \bar{u}_i \beta_i^T & 0 \end{bmatrix} \\
 &+ g(k) \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \beta_i \alpha_i^T & \beta_i \bar{u}_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + g(k) \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \beta_i \beta_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

类似于(3.29)右端第一项的证明,利用条件(3.9)及(3.15)可证(3.30)右端第二、三项趋近于零,当 $k \rightarrow \infty$ 时.

设(3.30)右端第一、四项为 S_f, S_o ,则由(3.21)知

$$S_o = \begin{bmatrix} [C_0 O(g^{-1}(k))g(k) + C_0(k)O(g^{-1}(k))g(k) + C_1(k)g(k)O(g^{-1}(k))] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{又} \quad S_f &= g(k) \begin{bmatrix} [(\alpha_1 \cdots \alpha_k)(\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T & (\alpha_1 \cdots \alpha_k)(\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \\ (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)(\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T & (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)(\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \end{bmatrix} \\
 &= g(k) \begin{bmatrix} [(\alpha_1 \cdots \alpha_k)] & [(\alpha_1 \cdots \alpha_k)]^T \\ [(\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)] & [(\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)]^T \end{bmatrix}. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以} \quad \|S_f\| &= g(k) \left\| \begin{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \\ (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \\ (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \end{pmatrix}^T \right\| \\
 &= g(k) \left\| \begin{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \\ (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \\ (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \end{pmatrix} \right\| \\
 &= g(k) \left\| (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T (\alpha_1 \cdots \alpha_k) + (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \right\| \\
 &\leq (\sqrt{g(k)} \left\| (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^T \right\|)^2 + (\sqrt{g(k)} \left\| (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T \right\|)^2.
 \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,由(3.27),(3.28)及上式知 $\|S_f\|$ 有界.

取任一不全为零的 $1 \times (mp+lq)$ 维向量 $(x^0 \ y^0)$

$$\begin{aligned}
 &(x^0 \ y^0) (S_f + S_o) \begin{pmatrix} x^{0T} \\ y^{0T} \end{pmatrix} \\
 &= (x^0 (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \sqrt{g(k)} + y^0 (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \sqrt{g(k)}) (x^0 (\alpha_1 \cdots \alpha_k) \sqrt{g(k)} + y^0 (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) \sqrt{g(k)})^T \\
 &+ x^0 C_0 x^{0T} O(g^{-1}(k))g(k) + x^0 C_0(k) x^{0T} O(g^{-1}(k))g(k) + x^0 C_1(k) x^{0T} O(g^{-1}(k))g(k). \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

若 x^0 不全为零,则(3.32)右端大于0,当 $k \rightarrow \infty$ 时,若 x^0 全为零,则 y^0 必不全为零.

$$\begin{aligned}
 (3.32) \text{ 右端} &= y^0 g(k) (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k) (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)^T y^{0T} \\
 &= y^0 (g(k) \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{u}_i^T) y^{0T} \\
 &\geq g(k) \left[\frac{k}{N} \right] \alpha_1 y^0 y^{0T}, \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,(3.32)右端大于 $K_0 \alpha_1 y^0 y^{0T}$,必大于0.

综上所述,当 $k \rightarrow \infty$ 时, $S_o + S_f$ 为一正定阵,不妨设为 C ,于是(3.7)成立.由引理1推出 $\theta_o(k) \rightarrow \theta_o$,当 $k \rightarrow \infty$ 时,引理2得证.

注记 引理2中条件(3.9)相当于概率意义下的 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\bar{u}_i\}$ 不相关(3.10)是输入的持续激励条件.

下面我们来导出椭球收敛于一点的充分条件.

定理1 若引理2条件均成立,且

$$F(k) = \text{tr} \sum_{i=1}^k \omega_i \omega_i^T + \varepsilon(k)/g(k).$$

其中

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k)/g(k) = 0. \quad (3.34)$$

则椭圆必收敛于一点,即参数的真值.

证 由定理 1 条件,根据引理 2 得出

$$\theta_o(k) \rightarrow \theta_i, \quad \text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

将(3.34)代入(2.11)式右端

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(k) - \text{tr} Y_k^T Y_k + \text{tr} \{ \theta_o^T(k) P_k^{-1} \theta_o(k) \} \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \text{tr} \sum_{i=1}^k \omega_i \omega_i^T + g^{-1}(k) \varepsilon(k) - \text{tr} Y_k^T Y_k + \text{tr} \{ \theta_o^T(k) P_k^{-1} \theta_o(k) \} \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \text{tr} H_k^T H_k - \text{tr} Y_k^T Y_k + \text{tr} \{ \theta_o^T(k) \Psi_k Y_k \} \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr} \{ H_k^T H_k - Y_k^T Y_k + (Y_k - H_k)^T Y_k \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} - \text{tr} \{ H_k^T \Psi_k \theta_o \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} - \text{tr} \{ (\sum_{i=1}^k \omega_i X_i^T) \theta_o \}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} o(g^{-1}(k)).$$

又由引理 2 证明知 $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) P_k^{-1} \geq C$, 由此可知, θ_o 收敛于一点,即参数的真值 θ_i .

4 仿真结果

例

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix} u(k-1) + \begin{pmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{pmatrix},$$

取 $u(k)$ 以 20 为周期, $u(k) = 0.8, k = 1, 2, \dots, 10, u(k) = -0.9, k = 11, \dots, 20; e_1(k), e_2(k)$ 均为零均值, 0.000025 方差的 Gaussian 过程, e_1 与 e_2 不相关, 可验证, 输入 u 和噪声 ω 满足第 3 节定理 1 条件.

根据第 2 节(2.12)~(2.15)的递推式, 选取 $\hat{\theta}_o(0) = [0 \ 0]^T, P_0 = 0.1, G(0) = 1, X_0 = 0$ 得到迭代 200 步、迭代 200, 300 步、迭代 200, 300, 400 步的三个图, 从附图可以看出包含真参数的椭圆不断缩小.

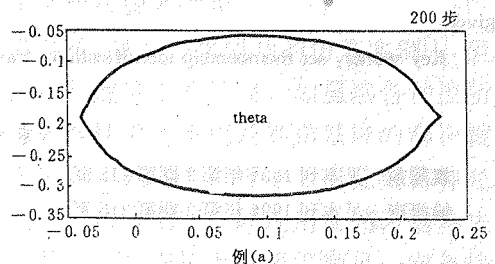
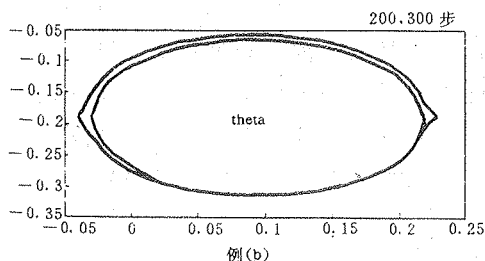


图 1 多输入多输出系统参数集员辨识的仿真结果

5 结 论

MIMO 系统参数的集员估计与 SISO 的集员估计有类似的性质,即多变量系统集员估计收敛性条件中如取维数为 1 即为单输入单输出的结果.

集员辨识不假定系统的噪声是随机过程,而只对有界性作假定,它已不同于目前参数辨识文献中的统计框架.

参 考 文 献

- [1] Fogel, E. . System Identification via Membership Set Constraints with Energy Constrained Noise. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1979, AC-24(5);752—758
- [2] Fogel, E. , and Huang, Y. F. . On the Value of Information in System Identification-Bounded Noise Case. Automatica, 1982, (2);229—238
- [3] Wahlberg, B. , and Ljung, L. . Hard Frequency-Domain Model Error Bounds From Least-Squares Like Identification Techniques. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1992, AC-37;900—912
- [4] Ljung, L. . 系统辨识——使用者的理论. 上海:华东师范大学出版社,1990
- [5] 袁震东. 自适应控制理论及其应用. 上海:华东师范大学出版社,1988

Set Membership Identification for the Parameters of MIMO Systems

YUAN Zhendong and XU Qiaonan

(Department of Mathematics, East China Normal University · Shanghai, 200062, PRC)

Abstract: The set membership identification for the parameters of MIMO systems is discussed in this paper. Assuming that the energy of the noise is unknown but bounded, a membership set for the parameters is an ellipsoid which will converge to a point under certain conditons. The theoretical proofs and numerical simulations are given.

Key words: set membership identification; least-square method; convergence

本文作者简介

袁震东 见本刊 1994 年第 2 期第 215 页.

徐桥南 见本刊 1994 年第 2 期第 215 页.