第 11 卷第 4 期
1994 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 4
Aug., 1994

鲁棒 H_∞ 状态反馈控制*

翁正新 王广雄 姚一新
(哈尔滨工业大学控制工程系，150006)

摘要：本文对结构参数不确定线性定常多变量系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈设计问题进行了研究，给出了系统鲁棒稳定和干扰衰减的条件，及相应的鲁棒 H_∞ 状态反馈设计方法，并用这种方法设计了一个倒立摆平衡控制器. 仿真结果表明，与 LQ 设计方法相比，按本文所提出的设计方法得到的控制器具有鲁棒稳定能力强、闭环动态性能良好等优点.

关键词：状态反馈；鲁棒镇定；干扰衰减；H_∞ 控制；倒立摆

1 引 言

H_∞ 状态反馈控制问题的研究始于 1987 年前后，作为 H_∞ 控制理论的一个分支，这种方法很快就得到了相当的重视，并迅速地发展起来，许多学者都进行了深入研究，如 Khargonekar[1]，Petersen[2,3]等人分别对鲁棒镇定和干扰衰减的 H_∞ 状态反馈设计问题进行了研究，遗憾的是他们没有同时考虑系统的鲁棒镇定和干扰衰减. Wang[4]在这方面作了一些工作，本文主要致力于这方面的研究，在假设系统状态全部可以获得的前提下，提出了保证系统鲁棒稳定且具有干扰衰减的条件和相应的 H_∞ 状态反馈设计方法，为基于观测器的鲁棒 H_∞ 状态反馈[5,6]设计方法的研究打下了基础. 文中还利用所给方法对倒摆系统进行了设计，并与 LQ 方法设计的控制器进行了比较，结果表明，按本文所提出的设计方法得到的控制器具有鲁棒稳定能力强、闭环动态性能良好等优点.

2 鲁棒 H_∞ 状态反馈控制

考虑不确定线性定常系统[4]

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + Dw(t), \tag{1a}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_1 x(t) \\ D_1 u(t) \end{bmatrix}. \tag{1b}$$

其中 $x(t)$ 为状态，$u(t)$ 为控制信号，$w(t)$ 为干扰信号，$z(t)$ 为被控输出. ΔA 为未知的有界结构不确定性，它可表示为

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A_i. \tag{2a}$$

其中 $\alpha_i (i=1,\cdots,l)$ 为不确定参数，A_i 是已知常数阵. 不失一般性，设

$$|\alpha_i| \leqslant 1, \quad i = 1,\cdots,l. \tag{2b}$$

通过奇异值分解，A_i 可分解为

$$A_i = T_i U_i^T, \quad i = 1,\cdots,l. \tag{2c}$$

---

* 国家高等学校博士学科点专项科研基金资助.
本文于1993年3月1日收到. 1993年7月12日收到修改稿.

其中 T_i 和 U_i 是加权酉矩阵. 则(2)式可表示为

$$\Delta A = TFU. \tag{3}$$

其中

$$T = [T_1, \cdots, T_l], \quad U = [U_1, \cdots, U_l]^{\mathrm{T}},$$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_l I \end{bmatrix}, \quad \| F \|_\infty \leqslant 1.$$

假设系统(1)满足:

A1) 系统(1)的状态全部可以获得;

A2) 名义系统(A,B)能控;

A3) D_1 列满秩.

定义 对于满足假设条件 A1)～A3)的结构参数不确定线性定常系统(1), 设 $\gamma>0$ 为给定常数, 如果存在一状态反馈控制律 $u=Kx(t)$, 使得:

1) $\bar{A} \triangleq A+\Delta A+BK$ 为稳定阵;

2) 闭环传递函数阵 $H(s) \triangleq \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 K \end{bmatrix}(sI-\bar{A})^{-1}D$

满足 $\| H(s) \|_\infty \leqslant \gamma$. 则称系统(1)是可镇定的且具有干扰衰减 γ.

定理 考虑满足假设条件 A1)～A3)的结构参数不确定线性定常系统(1), 设 $\gamma>0$ 为给定的干扰衰减常数, 则系统(1)是可镇定的且具有干扰衰减 γ 的条件是: 存在一常数 $\varepsilon>0$ 和一正定对称阵 Q, 使得代数 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm{T}}P + \varepsilon PTT^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}U^{\mathrm{T}}U + C_1^{\mathrm{T}}C_1 - PB(D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{4}$$

有一正定对称解 P.

当上述条件满足时, 相应的状态反馈增益为

$$K = -(D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}B^{\mathrm{T}}P. \tag{5}$$

这一定理是对文献[1～4]中有关结论的完善和发展, 它同时考虑了系统的鲁棒稳定问题和干扰抑制问题. 为进一步研究基于观测器的鲁棒 H∞状态反馈问题打下了一定的基础.

3 倒立摆平衡控制

倒立摆平衡控制系统如图 1 所示. 摆和车的运动方程为

$$ml\ddot{r}\cos\theta + (J + ml^2)\ddot{\theta} = -f\dot{\theta} + mlg\sin\theta + w, \tag{6a}$$

$$(M+m)\ddot{r} + ml\cos\theta\ddot{\theta} = -F\dot{r} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Gu. \tag{6b}$$

其中 r 为小车位移, θ 为摆杆偏角, M 为小车质量, m 为摆杆质量, l 为摆的重心至转轴的长度, J 为摆杆对重心的转动惯量, F 为小车系统的等效摩擦系数, f 为摆的摩擦阻力矩系数, G 为电机放大系数, g 为重力加速度, u 为控制输入, w 为作用在摆杆上的干扰力矩. 系统参数的名义值为 $M=0.392\mathrm{kg}$; $m=$

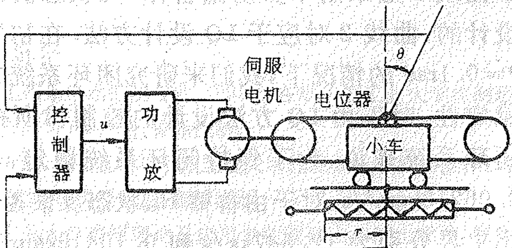

图 1 倒立摆控制系统

0.074kg；$l=0.358$m；$J=0.0095$kgm²；$F=2.847$kg/s；$f=0.00218$kgm²/s；$G=56.29$N/V；$g=9.8$m/s².

令 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})^T$，其中 x_1 和 x_2 可直接获得，x_3 和 x_4 也可通过一些方法获得. 在平衡点($\theta=\dot{\theta}=0,r=\dot{r}=0$)附近对方程(6)进行线性化，代入参数后得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3,\\ \dot{x}_2 &= x_4,\\ \dot{x}_3 &= -0.8445x_2-6.6359x_3+0.0071x_4+131.2027u-3.253w,\\ \dot{x}_4 &= 14.8541x_2+9.2603x_3-0.1247x_4-183.0908u+57.215w.\end{aligned} \tag{7}$$

由(7)式可得控制之前系统的极点为{4.02,0,−3.46,−4.97}，此系统是不稳定的. 但因为是可控且可观测的，所以，通过状态反馈，可使状态 x 移到原点上，即可以使摆成为倒立的状态.

由于小车移动范围的限制以及放大器的饱和，对被控制系统应有如下约束

$$|r|<0.4\text{m},\quad |u|<0.15\text{v}. \tag{8}$$

为了进行比较，文中采用了两种方法对线性化后的系统(7)进行设计.

首先采用大家熟知的 LQ 设计方法. 选取

$$Q=\text{diag}\{1,0.1\times10^{-2},0.1,0.1\},\quad R=50.0.$$

借助 LQ 设计软件包，可得最优全状态反馈律

$$u=Kx=[0.130,\ 0.844,\ 0.202,\ 0.208]x. \tag{9}$$

下面采用文中所提出的鲁棒 H_∞状态反馈设计方法进行设计. 我们知道，倒摆系统存在严重的不确定性，一方面是模型本身的不确定性，另一方面是系统受到外界不确定因素的干扰. 文中主要考虑参数 F 和 f 的摄动.

考虑到约束条件(8)，选取加权矩阵为

$$C_1=\begin{bmatrix}1.5&0&0&0\\0&1.5&0&0\end{bmatrix},\quad D_1=28.$$

则根据本文所给定理，取 $\gamma=1.0$，$Q=0.1I$，$\varepsilon=0.9$ 可得最优反馈律：

$$u=Kx=[0.07104383,\ 1.089143,\ 0.252529,\ 0.2878702]x. \tag{10}$$

对以上两种控制律和倒立摆的非线性模型构成的闭环系统分别进行数字仿真. 图 2 给出了在初始条件 $r=0.1$m，$\theta=0.1$rad 下，两种控制律构成的闭环系统的摆偏角 θ 的动态响应曲线. 图中曲线 1 是采用本文所给鲁棒 H_∞状态反馈方法设计的，曲线 2 对应于 LQ 设计方法. 在初始条件 $\theta=0.1$rad 的情况下，我们来研究闭环系统的鲁棒稳定性，对于由 LQ 方法设计的控制律所构成的闭环系统来说，为了保持闭环系统稳定，参数 F 和 f 的变化上界分别为 7.847kg/s 和 0.06218kgm²/s，对于由鲁棒 H_∞状态反馈控制律(10)所构成的闭环系统，参数 F 和 f 的变化上界分别为 12.647kg/s 和 0.10418kgm²/s. 可见按本文提出的方法设计的控制器具有好的鲁棒稳定能力和闭环动态性能，具有很好的应用前景.

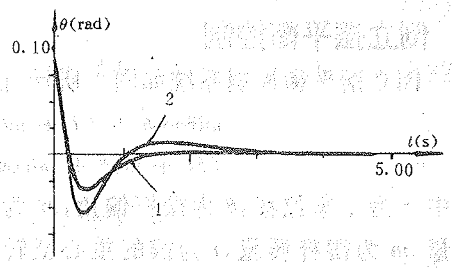

图 2 动态响应曲线

4 结束语

本文对结构参数不确定线性定常系统的 H∞状态反馈问题进行了研究，给出了系统鲁棒稳定和干扰衰减的条件和相应的鲁棒 H∞状态反馈设计方法，并用这种方法设计了倒立摆平衡控制器，而且和 LQ 设计进行了比较，结果表明：本文所提出的方法具有强的鲁棒稳定性和良好的动态特性，具有很好的应用前景．当系统状态不可获得时，可采用状态观测器[5,6].

参 考 文 献

[1] Khargonekar, P. P., Petersen, I. R. and Zhou, K.. Feedback Stabilization of Uncertain Systems. Proc. of 25th Allerton Conf. Commun. Contr. Comput., Monticello, Illinois, IB, 1987, 88—96

[2] Petersen, I. R. and Hollot, C. V.. Using Observers in the Stabilization of Uncertain Linear Systems and in Disturbance Rejection Problems. Proc. of 25th IEEE CDC Conf., Athens, 1986, 1466—1471

[3] Petersen, I. R., Hollot, C. V.. High Gain Observers Applied to Problems in Disturbance Attenuation, H^{∞}-Optimization and the Stabilization of Uncertain Linear Systems. Proc. of the 1988 ACC Conf., Atlanta, 1988, 2490—2496

[4] Wang, Y. J., Shieh, L. S. and Sunkel, J. W.. Observer-Based Robust-H_∞ Control Laws for Uncertain Linear Systems. Proc. AIAA GN & C Conf., 1991, 741—751

[5] Weng Zhengxin, Wang Guangxiong and Yao Yixin. H^{∞} Control of Inverted Pendulum. Proc. of the 1993 IEEE Tencon'93, Beijing, China, 1993

[6] 翁正新，王广雄，姚一新．一种基于降阶观测器的鲁棒 H^{∞}设计方法．第五届全国控制与决策系统学术讨论会论文集，黄山，1993，403—407

Robust H_∞ State Feedback Control

WENG Zhengxin, WANG Guangxiong and YAO Yixin

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150006, PRC)

Abstract: This paper studies the robust H_∞ state feedback control for linear time-invariant systems with structured parameter uncertainty. A condition for robust stability and disturbance attenuation is presented, and the corresponding robust H_∞ state feedback design method is given. An inverted pendulum equilibrium controller is designed using the proposed method. Simulation results show that, compared with the controller designed by LQ method, the controller designed by the proposed method has the advantages of strong robust stability and good closed-loop dynamic performance.

Key words: state feedback; robust stabilization; disturbance attenuation; H_∞ control; inverted pendulum

本文作者简介

翁正新 1966 年生．1989 年毕业于哈尔滨工业大学控制工程系自动控制专业．1992 年在哈尔滨工业大学控制理论及应用专业获硕士学位．现为该专业博士研究生．主要研究方向为 H∞控制，鲁棒控制．

王广雄 1933 年生．1957 年毕业于哈尔滨工业大学研究生班，后一直在哈尔滨工业大学任教并从事科研工作，现为该校控制工程系教授，博士生导师．目前主要研究方向是 H∞控制理论及应用，鲁棒控制．

姚一新 1956 年生．分别于 1983 年和 1991 年在哈尔滨工业大学控制理论及应用专业获硕士和博士学位．现为该校控制工程系副教授．目前主要研究方向是 H∞控制和鲁棒控制．