第 11 卷第 4 期
1994 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 4
Aug., 1994

线性相似组合系统的特性分析*

姜 斌 刘晓平 张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳，110006)

摘要：本文讨论线性相似组合系统的一些性质，结果表明这类大系统的特性可由两个低阶修正子系统的相应性质确定.

关键词：相似组合系统；特性分析；能控性与能观性

1 引 言

随着系统维数的增大，系统的分析与控制变得越来越复杂. 因此，一个有意义的问题是能否使大系统的分析与控制得到简化，即能否通过孤立子系统和关联项的信息来刻划整个大系统的性质. 最近十年，一些研究结果表明，大系统的自身结构对其分析与控制产生很大影响. 对称组合系统[1,2]是由若干个相同的子系统以对称的内联方式构成的大系统. 这类系统有较深的实际背景，多机电力系统的模型[3]和军事控制系统的模型[4]就是两个典型的例子. 文[5]给出了较对称组合系统一般的线性相似组合系统的数学描述，用几何方法得到了其分散干扰解耦问题可解的充要条件. 本文分析了线性相似组合系统的一些重要性质：谱特征、能控性、能观性、可镇定性、黎卡提方程和李雅普诺夫方程解的存在性，并且构造出了上述两种方程解的具体表达式，最后给出了一个说明性的数字例子.

2 系统模型

考虑一类线性组合大系统 S，它由 N 个子系统 S_i 组成，S_i 由(1)式给出

$$\dot{x}_i = A_1x_i + B_1u_i + \sum_{j=1}^{N}D_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{N}E_{ij}u_j, \tag{1a}$$

$$y_i = C_1x_i. \tag{1b}$$

其中 $x_i\in \mathrm{R}^n, u_i\in \mathrm{R}^m, y_i\in \mathrm{R}^r$ 分别表示系统的状态、输入和输出($i=1,2,\cdots,N$). 我们假设内联矩阵 D_{ij}, E_{ij} 具有如下结构：

$$D_{ij} = \begin{cases} D_d, & i=j, \\ D_q, & i\neq j, \end{cases} \quad E_{ij} = \begin{cases} E_d, & i=j, \\ E_q, & i\neq j. \end{cases}$$

大系统(1)可以等价地表示为组合方程

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2a}$$

$$y = Cx. \tag{2b}$$

其中

$$x^{\mathrm{T}} = (x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_N^{\mathrm{T}}), \quad x\in \mathrm{R}^{Nn};$$

$$u^{\mathrm{T}} = (u_1^{\mathrm{T}}, u_2^{\mathrm{T}}, \cdots, u_N^{\mathrm{T}}), \quad u\in \mathrm{R}^{Nm};$$

---

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于1993年6月29日收到. 1994年2月28日收到修改稿.

$$y^T = (y_1^T, y_2^T, \cdots, y_N^T), \quad y \in \mathrm{R}^{Nr};$$

组合矩阵 $A \in \mathrm{R}^{Nn \times Nn}$, $B \in \mathrm{R}^{Nn \times Nm}$, $C \in \mathrm{R}^{Nr \times Nn}$,具有结构

$$A = \begin{bmatrix} A_1 + D_d & D_q & \cdots & D_q \\ D_q & A_1 + D_d & \cdots & D_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_q & D_q & \cdots & A_1 + D_d \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 + E_d & E_q & \cdots & E_q \\ E_q & B_1 + E_d & \cdots & E_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_q & E_q & \cdots & B_1 + E_d \end{bmatrix},$$

$$C = \mathrm{diag}[C_1, \cdots, C_1].$$

我们把具有上述结构的大系统 S 称为线性相似组合系统.

3 用低维系统描述大系统的性质

对于由(1)或(2)描述的大系统 S,考虑 $Ni \times Ni$ 阶非奇异矩阵 T_i

$$T_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 & \cdots & 0 & I_i \\ 0 & I_i & \cdots & 0 & I_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_i & I_i \\ -I_i & -I_i & \cdots & -I_i & I_i \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$T_i^{-1} = 1/N \begin{bmatrix} (N-1)I_i & -I_i & \cdots & -I_i & -I_i \\ -I_i & (N-1)I_i & \cdots & -I_i & -I_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -I_i & -I_i & \cdots & (N-1)I_i & -I_i \\ I_i & I_i & \cdots & I_i & I_i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中 I_i 为 $i \times i$ 阶单位矩阵,$i = n, m$ 或 r. 我们易得下面的引理.

引理 对于由(3)和(4)定义的 T_i 和 T_i^{-1},下列式子成立:

$$T_n^{-1} A T_n = \begin{bmatrix} A_s & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_s & \\ & & & A_0 \end{bmatrix}, \quad T_n^{-1} B T_m = \begin{bmatrix} B_s & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_s & \\ & & & B_0 \end{bmatrix},$$

$$T_r^{-1} C T_n = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & C_1 & \\ & & & C_1 \end{bmatrix}.$$

其中

$$A_s = A_1 + D_d - D_q, \quad A_0 = A_1 + D_d + (N-1)D_q,$$

$$B_s = B_1 + E_d - E_q, \quad B_0 = B_1 + E_d + (N-1)E_q.$$

由引理可知,线性相似组合系统 S 具有下列性质:

定理 1 $\mathrm{spec}(A)=\mathrm{spec}(A_0)\cup\{\overset{N-1}{\bigcup}\mathrm{spec}(A_s)\}$. 其中 $\overset{N-1}{\bigcup}\mathrm{spec}(A_s)=\mathrm{spec}(A_s)\cup\mathrm{spec}(A_s)\cdots\cup\mathrm{spec}(A_s)$.

定理 2 大系统 S 完全能控当且仅当 (A_0,B_0), (A_s,B_s) 均完全能控.

定理 3 大系统 S 完全能观当且仅当 (A_s,C_1), (A_0,C_1) 均完全能观.

定理 4 如果 (A_0,B_0), (A_s,B_s) 均为可镇定的，那么大系统 (A,B) 为可镇定的.

李雅普诺夫方程和黎卡提代数方程的解的存在性及其构造是线性控制系统理论中的重要问题，对于由(1)或(2)描述的线性相似组合系统，这些解可由低阶系统相应方程的解构造出来. 下面的定理给出了这两种解的具体构造方法：

定理 5 设 $\mathrm{spec}(A_s)\subset LHP$, $\mathrm{spec}(A_0)\subset LHP$, 且 $P_s=P_s^{\mathrm{T}}>0$, $P_0=P_0^{\mathrm{T}}>0$ 分别表示下列李雅普诺夫方程的解

$$A_s^{\mathrm{T}}P_s+P_sA_s+Q_1=0, \tag{5a}$$

$$A_0^{\mathrm{T}}P_0+P_0A_0+Q_1=0. \tag{5b}$$

其中 $Q_1=Q_1^{\mathrm{T}}>0$. 令 $Q=\mathrm{diag}[Q_1,\cdots,Q_1]$，则组合大系统 S 的李雅普诺夫方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+Q=0 \tag{6}$$

的唯一对称正定的解 $P\in\mathrm{R}^{Nn\times Nn}$ 具有结构

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & \cdots & P_2\\ P_2 & P_1 & \cdots & P_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ P_2 & P_2 & \cdots & P_1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中 $P_1\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 和 $P_2\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 由下式给出

$$P_1=1/N[P_0+(N-1)P_s], \tag{8a}$$

$$P_2=1/N(P_0-P_s). \tag{8b}$$

证　因为 $\mathrm{spec}(A_s)\subset LHP$, 且 $\mathrm{spec}(A_0)\subset LHP$, 由定理 1 得, $\mathrm{spec}(A)\subset LHP$, 因此(6)式有唯一对称正定的解.

设(6)有形同(7)的解，对(6)进行可逆变换

$$T_n^{-1}A^{\mathrm{T}}T_nT_n^{-1}PT_n+T_n^{-1}PT_nT_n^{-1}AT_n+T_n^{-1}QT_n=0,$$

由上式整理可得

$$A_s^{\mathrm{T}}(P_1-P_2)+(P_1-P_2)A_s+Q_1=0,$$
$$A_0^{\mathrm{T}}[P_1+(N-1)P_2]+[P_1+(N-1)P_2]A_0+Q_1=0.$$

由(5)式及解的唯一性，得

$$P_1-P_2=P_s,$$
$$P_1+(N-1)P_2=P_0.$$

即

$$P_1=1/N[P_0+(N-1)P_s],$$
$$P_2=1/N(P_0-P_s).$$

又　$$\mathrm{spec}(P)=\mathrm{spec}(T_n^{-1}PT_n)=\mathrm{spec}(P_0)\cup\{\overset{N-1}{\bigcup}\mathrm{spec}(P_s)\},$$

因为 P_0,P_s 为对称正定的，故 P 为对称正定的. 由(6)式的解的唯一性，满足(7)，(8)的 P

为(6)的唯一对称正定的解.

定理 6 假设(A,B)是完全能控的,而且$P_s=P_s^{\mathrm{T}}>0, P_0=P_0^{\mathrm{T}}>0$分别表示下列黎卡提代数方程的解

$$A_s^{\mathrm{T}}P_s+P_sA_s-P_sB_sR_1^{-1}B_s^{\mathrm{T}}P_s+Q_1=0, \tag{9a}$$

$$A_0^{\mathrm{T}}P_0+P_0A_0-P_0B_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P_0+Q_1=0. \tag{9b}$$

其中$R_1=R_1^{\mathrm{T}}>0, Q_1=Q_1^{\mathrm{T}}>0$. 令$R=\mathrm{diag}[R_1,\cdots,R_1], Q=\mathrm{diag}[Q_1,\cdots,Q_1]$,则组合大系统$S$的黎卡提代数方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0 \tag{10}$$

的唯一正定和对称的解$P\in\mathrm{R}^{N_n\times N_n}$具有结构

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & \cdots & P_2\\ P_2 & P_1 & \cdots & P_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ P_2 & P_2 & \cdots & P_1\end{bmatrix}.$$

其中$P_1\in\mathrm{R}^{n\times n}$和$P_2\in\mathrm{R}^{n\times n}$由下式给出

$$P_1=1/N[P_0+(N-1)P_s],$$

$$P_2=1/N(P_0-P_s).$$

证 因为(A,B)是完全能控的,由定理2得$(A_s,B_s),(A_0,B_0)$均为完全能控的,因此(9)式和(10)式有唯一正定和对称的解,使用类似于定理5的证明方法,可得结论.

4 例 子

设大系统S由6个子系统组合而成,每个子系统描述如下:

$$\dot{x}_i=A_1x_i+B_1u_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}Hx_j+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}Ku_j,\quad (i=1,\cdots,6).$$

其中 $A_1=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & 7\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}-5\\ -3\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$

经过简单的计算可得

$$A_s=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 0 & 8\end{bmatrix},\quad A_0=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B_s=\begin{bmatrix}-6\\ -4\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}.$$

注意到A_s,A_0具有正实根,由定理1,大系统S是不稳定的. 但$(A_s,B_s),(A_0,B_0)$均完全能控,由定理2,大系统(A,B)也完全能控. 因此,$(A_s,B_s),(A_0,B_0)$和(A,B)均可反馈镇定. 实际上,选择反馈律

$$F_s=[0\quad 4],\quad F_0=[7.5\quad -4],$$

使得

$$\mathrm{spec}(A_s+B_sF_s)=\{-4,\ -8\},$$

$$\mathrm{spec}(A_0+B_0F_0)=\{-1,\ -3\},$$

这样一来,使大系统S稳定化的状态反馈律为

$$F=T_1\mathrm{diag}[F_s,\ \cdots,\ F_s,\ F_0]T_2^{-1},$$

并且

$$\mathrm{spec}(A+BF)$$

$$=\{-4, -8, -4, -8, -4, -8, -4, -8, -4, -8, -1, -3\},$$

其中 T_1, T_2^{-1} 由(3)式和(4)式确定.

5 结 论

Nn 阶线性相似组合系统的特性(如稳定性、能控性与能观性、可镇定性、李雅普诺夫方程和黎卡提方程的解)均可由两个 n 阶修正子系统来描述. 由此可见,相似结构可以使大规模线性相似组合系统的分析大大简化.

参 考 文 献

[1] Lunze, J.. Dynamics of Strongly Coupled Symmetric Composite Systems. Int. J. Control., 1986, 44(6):1617—1640

[2] Liu, X. P.. Output Regulation of Strongly Coupled Symmetric Composite Systems. Automatica, 1992, 28(5):1037—1041

[3] Mohadjer, M. and Johoson, C. D.. Power System with Disturbance Accommodation. Proc. 22nd. IEEE Conf. on Decision and Control, 1983, 1429—1433

[4] Hazewinkel, M. and Martin, C.. Symmetric Linear Systems. Int. J. Control, 1986, 37(6):1371—1384

[5] 姜斌,赵军,张嗣瀛. 线性相似组合系统的分散干扰解耦. 控制理论及其应用年会论文集,武汉,1993,430—433

Character Analysis for Linear Composite Systems with Similarity

JIANG Bin, Liu Xiaoping and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: This paper discusses a class of linear composite systems with similarity. It is shown that the character of this kind of large-scale systems can be determined by the corresponding properties of two low-order modified subsystems of systems.

Key words: composite systems with similarity; character analysis; controllability and observability

本文作者简介

姜 斌 1966 年生. 1988 年毕业于江西师范大学数学系. 1991 年于东北工学院数学系获硕士学位,1992 年考入东北工学院自动控制系攻读博士学位. 从事复杂控制系统的结构研究.

刘晓平 1962 年生. 分别于 1984 年、1987 年和 1989 年在东北工学院自动控制系获学士、硕士和博士学位,毕业后留校任教并于 1993 年晋升为教授,博士生导师. 研究工作包括最优控制,微分对策,广义系统及非线性系统等.

张嗣瀛 见本刊 1994 年第 2 期第 198 页.