

参数估计的 Systolic 算法

葛新科 胡保生

(西安交通大学系统工程研究所, 710049)

摘要: 本文根据最小二乘原理在三角形 Systolic 阵列上实现了单输入单输出系统的递推参数估计算法. 首先利用矩阵的三角分解给出了待估参数及协方差阵的递推公式, 然后利用正交平面旋转并结合三角形 Systolic 阵列的特点给出了相应的 Systolic 递推参数估计算法, 最后还考虑了算法实现时的性能指标. 其后是一些数值仿真结果. 由于文中利用了正交平面旋转, 因而所得算法是数值稳定的.

关键词: systolic 阵列; 三角分解; 参数估计

1 引言

大规模集成技术与并行计算机的发展对控制理论及算法的发展产生了很大的影响, 而且已取得了一定的成果^[1~3], 特别是卡尔曼滤波方面的成果更为显著^[4,5]. 文[6]中给出了 Systolic 阵列上的三角分解, 文[7]中给出了递推最小二乘法在超立方体多处理器上的算法. 本文在此基础上结合矩阵三角分解与三角形 Systolic 阵列的特点给出了递推最小二乘参数估计的 Systolic 算法.

所谓 Systolic 阵列就是一个由简单处理单元组成的网络, 且各单元只与它们的最近邻单元相连; 各个单元可执行一些简单的算术和逻辑运算, 并有少量的局部存储能力; 数据在阵列中按时钟脉冲的节奏流动, 正象血液在身体内的流动一样. 这就是 Systolic 阵列这个术语的由来. 在此意义下已得到了许多阵列, 例如线性阵列、三角形阵列、矩阵阵列及梯形阵列等. 本文安排如下: 第二节给出了带指数遗忘因子的最小二乘参数估计的基于三角分解的递推公式. 第三节根据三角形阵列的特点及第二节的递推公式并利用正交平面旋转给出了相应的 Systolic 算法, 第四节分析了算法实现时的一些性能指标, 第五节是一些数值仿真结果, 最后在第六节是一些讨论.

2 基于三角分解的递推公式

考虑结构参数 l, m , 及 d 已知的单输入单输出系统

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + e(k).$$

其中 $u(k)$, $y(k)$ 及 $e(k)$ 分别为系统的输入、输出及白噪声, 且

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_lq^{-l},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}.$$

令 $\Phi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-l), u(k-d), \dots, u(k-d-m)]$,

$$\theta^T = [a_1, a_2, \dots, a_l, b_0, b_1, \dots, b_m].$$

设 θ 的第 N 次估计值及协方差阵分别为 $\hat{\theta}$ 和 P . 由于 P 为 $n \times n$ 对称正定阵因而可分解为 $P = R^T R$, 其中 $n = l + m + 1$, 而 R 为非奇异上三角阵. 这样, 我们有如下引理.

引理 设第 N 次估计值及协方差阵的分解 $P = R^T R$ 已知, 且记 $\Phi^T = \Phi^T(N+1)$ 及 $x = y(N+1)$, 那么根据渐消记忆递推最小二乘法得到的第 $N+1$ 次参数估计 $\hat{\theta}$ 及协方差阵 $\tilde{P} = \tilde{R}^T \tilde{R}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \hat{\theta} + k(x - \Phi^T \hat{\theta}), \\ \tilde{P} &= \tilde{R}^T \tilde{R}.\end{aligned}$$

其中 $\tilde{R}$ 满足

$$Q \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} & 0^T \\ -c & \frac{1}{\sqrt{\rho}} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & u^T \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

而 $c = R\Phi$, Q 为正交阵, 其目的是把上式左端阵划为上三角阵, $k = -\frac{\sqrt{\rho}u}{\delta}$, 而 ρ 为遗忘因子, $0 < \rho < 1$.

证 根据渐消记忆递推最小二乘公式, 我们只需证明

$$\tilde{R}^T \tilde{R} = \frac{1}{\rho} \left[P - \frac{P\Phi\Phi^T P}{\rho + \Phi^T P \Phi} \right],$$

$$R = \frac{P\Phi}{\rho + \Phi^T P \Phi}.$$

把(1)式两边同时平方并注意到 $Q^T Q = I$, 我们得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} & -c^T \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho}} R^T \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} & 0^T \\ -c & \frac{1}{\sqrt{\rho}} R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta & 0^T \\ u & \tilde{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & u^T \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \rho + c^T c & -\frac{1}{\sqrt{\rho}} c^T R \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho}} R^T c & \frac{1}{\rho} R^T R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta^2 & \delta u^T \\ \delta u & u u^T + \tilde{R}^T \tilde{R} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此得

$$\delta^2 = \rho + c^T c = \rho + \Phi^T R^T R \Phi = \rho + \Phi^T P \Phi,$$

$$\delta u = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} R^T c,$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^T \tilde{R} &= \frac{1}{\rho} R^T R - u u^T = \frac{1}{\rho} R^T R - \frac{1}{\rho} \frac{R^T c c^T R}{\delta^2} \\ &= \frac{1}{\rho} P - \frac{1}{\rho} \frac{R^T R \Phi \Phi^T R^T R}{\rho + \Phi^T P \Phi} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[P - \frac{P\Phi\Phi^T P}{\rho + \Phi^T P \Phi} \right], \end{aligned}$$

而

$$\frac{P\Phi}{\rho + \Phi^T P \Phi} = \frac{R^T c}{\delta^2} = \frac{-\sqrt{\rho} \delta u}{\delta^2} = -\frac{\sqrt{\rho} u}{\delta} = k. \quad \text{E. Q. D.}$$

由此引理可以看出: 1) 当得到一个新的观测值时, 我们可以通过(1)中的运算得到新的协方差阵的分解阵 $\tilde{R}$, 而其中的正交变换阵 Q 可通过许多方法得到, 例如 Householder 变换法, Gram-Schmidt 正交化方法或者 Givens 平面旋转. 考虑到三角形 Systolic 阵的特

点,我们采用 Givens 平面旋转法. 2) 由于采用了正交变换,因而所得方法是数值稳定的.

3 Systolic 算法

不失一般性,我们设 $l=m=2, n=l+m+1=5$, 且记

$$\Phi^T = [-y(N), -y(N-1), u(N+1-d), u(N-d), u(N-d-1)] = [\Phi_1, \dots, \Phi_5],$$

$$\theta^T = [a_1, a_2, b_0, b_1, b_2] = [\theta_1, \dots, \theta_5].$$

由前节引理知,当已知 $\hat{\theta}$ 及 R 且已获得新观测向量 Φ 时,新的估计 $\tilde{\theta}$ 及上三角阵 $\tilde{R}$ 可通过如下三步来完成

- 1) 计算 $c = R\Phi$ 及 $\sigma = x - \Phi^T \hat{\theta}$;
- 2) 逐次利用正交平面旋转由下向上把(1)式左端阵划为上三角阵;
- 3) 形成新的估计 $\tilde{\theta}$.

在第 $N+1$ 次估计过程开始时,设 Systolic 阵列中的数据分布如图 1 所示,且各步运算后该分布不变. 数据的输入输出是以图中所示的斜的方式进行的. 各步输入输出的方式相同,只需改变内容即可. 图 1 中的数据为第一步的输入及输出. 由(1)式左端矩阵的特殊性可以验证当采用 Givens 旋转由下向上把 $-c$ 中的元素划为零后,我们就得到(1)式左端的矩阵,这样上述第二步只需 n 次旋转即可. 各次旋转如下计算.

令

$$\beta_0 = \rho, \quad \delta_0 = \sqrt{\beta_0} = \sqrt{\rho}.$$

那么第 i 次旋转按如下方式计算($i=1, \dots, n$)

$$\beta_i = \beta_{i-1} + c_{n+1-i}^2, \quad \delta_i = \sqrt{\beta_i},$$

$$d_i = \delta_{i-1}/\delta_i, \quad s_i = -c_{n+1-i}/\delta_i.$$

下面给出各步的输入、输出及各单元的计算功能.

1) 输入为 $[(x, \rho), (\Phi_5, 0), \dots, (\Phi_1, 0)]$, 而相应的输出为 $[\sigma, c_5, \dots, c_1]$, 其中第一行最右单元的输出 x_0 即为 σ ; 各单元的计算功能分别为

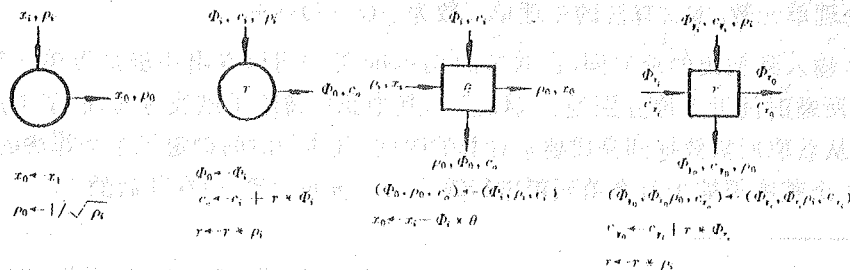


图 2 第一步各单元计算功能

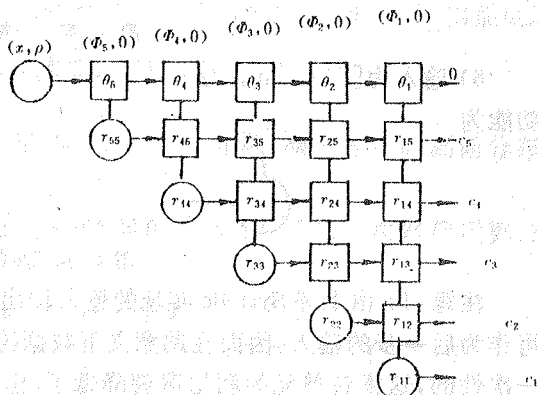


图 1 systolic 阵列结构及数据分布

2) 输入为 $[\rho, (c_5, 0), \dots, (c_1, 0)]$, 而相应的输出为 $[(1/\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho+c_1^2+\dots+c_5^2}), u_5, \dots, u_1]$, 其中第一行最右单元的输出 (ρ_0, δ_0) 分别为 $(1/\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho+c_1^2+\dots+c_5^2})$; 各单元的计算功能为

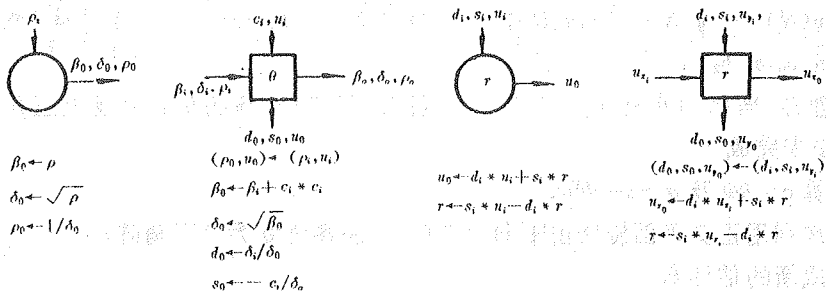


图 3 第二步各单元计算功能

3) 输入为 $[(1/\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho+c_1^2+\dots+c_5^2}), u_5, \dots, u_1]$, 只需第一行单元计算即可, 其计算功能为



图 4 第三步各单元计算功能

注意: 1) 由上述 Systolic 实现的输入输出的数据及方式可以看出, 前一步的输出立刻可作为后一步的输入, 因而在此意义下数据的流动是连续的, 但各单元的计算在各步只是一次性的, 这样各单元的利用率就降低了. 但可以想见这样的 Systolic 实现对多输入多输出系统会更有效. 2) 在整个估计过程开始时应设置初始估计 θ_0 及 R_0 , 这可以根据初始值的选取方式而定. 例如可取 $\theta=0, R=\alpha I, I$ 为单元阵, α 是一个充分大的正数, 而观测向量 Φ 中的缺项由零补齐即可.

4 性能分析

Systolic 迭代算法的性能一般由如下几个指标衡量: 处理单元数、从数据输入到结果输出的总时间、加速比及处理单元的利用率. 与[7]中相同, 我们设一次加法(减法)和一次乘法(除法)所需的时间是固定的, 且记为 τ , 而且设一次开方运算所需时间也为 τ^* . 由前节 Systolic 阵列的特点知, 只有当某处理单元获得必要的数据后才能进行自身的运算, 因此最慢的处理单元决定了算法的总执行时间. 下面我们分别讨论上述几个指标的含义及本文算法的相应值.

1) 处理单元数. 本文算法的处理单元数为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

2) 从输入到输出的总时间. 由前节的 Systolic 算法可以看出各步最慢单元完成一次基本周期所需时间近似地分别为 $2\tau, 4\tau$ 及 τ , 其中我们忽略了赋值时间, 而基本周期表示最慢单元从获取所需数据到完成要求计算的时间, 且这一时间确定了整个算法的总时间. 在前 $n+1$ 个基本周期中所有单元都进行算法第一步的运算; 而在其后的 $2(n+1)$ 个基本

* 此处假设开方运算时间为 τ 并不失去一般性. 因为在计算机上开方运算时间总可以是 τ 的某个倍数, 而加速比是关于问题的规模 n 的, 而这点是本质的. 这样后面的几个性能分析值仍有意义.

周期内所进行的运算包括算法的第一及第二步运算,因而基本周期由第二步的基本周期决定;在最后一个基本周期中进行第三步的运算;因此从数据输入到结果输出的总时间为 $(n+1)2\tau+2(n+1)4\tau+\tau=10(n+1)\tau+\tau$.

3) 加速比表示算法的串行执行时间与 Systolic 总时间之比. 简单计算知算法各步的串行时间分别为 $[n(n+1)+n+1]\tau$, $[4n+8\times\frac{1}{2}n(n+1)]\tau$ 及 $n\tau$; 因而总串行时间为 $(5n^2+11n+1)\tau$, 这样加速比即为 $(5n^2+11n+1)/(10n+11)=O(n)$.

4) 处理单元的利用率表示各处理单元在整个算法执行过程中的平均运算时间与整个算法的运算时间之比,也即已用处理能力与总可用处理能力之比. 本文算法的总可用处理能力为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(10n+11)\tau$. 简单计算知算法各步的已用处理能力分别为 $(n+1)\tau+n(n+1)\tau$, $2(n+1)(n+2)\tau$ 及 $(n+2)\tau$, 这样总已用能力为 $(3n^2+9n+7)\tau$, 因而处理单元的利用率为 $2(3n^2+9n+7)/(n+1)(n+2)(10n+11)$.

5 数值仿真结果

本节给出了文中算法的数值仿真结果,输入为 PRBS 序列,噪声为正态高斯分布,均值为 0,方差为 1. 结果如下.

算例 1 $l=m=2, a_1=2, a_2=1, b_0=2, b_1=1, b_2=0.5$, 共进行了二十次迭代运算,结果如表 1.

表 1 算例 1 仿真结果

算法 \ 精确值 估计值	$a_1=2$	$a_2=1$	$b_0=2$	$b_1=1$	$b_2=0.5$
平方根法	1.996576	0.996282	2.073837	1.036354	0.403020
UD 法	1.982064	0.980655	2.097661	1.013904	0.611189
文中算法	1.982064	0.980655	2.097661	1.013904	0.611189

以上三种算法一次迭代所用机时都为 0.054945.

算例 2 $l=2, m=1, a_1=-1.5, a_2=0.7, b_0=1, b_1=0.5$, 共进行了二十五次迭代,结果如表 2.

表 2 算例 2 仿真结果

算法 \ 精确值 估计值	$a_1=-1.5$	$a_2=0.7$	$b_0=1$	$b_2=0.5$
平方根法	-1.506809	0.668930	0.930415	0.494167
UD 法	-1.586006	0.763153	1.071839	0.475143
文中算法	-1.586006	0.763153	1.071839	0.475143

以上三种算法一次迭代所用机时为 0.054945*.

从上述结果可知,文中算法与 UD 分解的精确度相当,而且计算量也相当. 但文中算

* 显然算例 2 的机时应少,但计算机中是以时钟的脉冲周期为单位的,所以算出机时相同. 实际上算例 2 的机时要少.

法是基于并行三角形 Systolic 阵列而形成的算法,而前两种算法的直接并行实现是困难的.由算法的结构知,加速比可达到 5,也即文中算法在三角形 Systolic 阵列上离线运行时间是前两种算法的 1/5,大约为 0.01 秒.这样可以看出文中算法可用于在线实时系统中.

6 讨 论

1) 本文利用渐消记忆最小二乘法的思想,并结合矩阵三角分解及三角形 Systolic 阵列的特点给出了单输入单输出控制系统的 Systolic 参数估计算法,因而提高了参数估计的速度.

2) 由于文中采用了数值稳定的 Givens 平面旋转,因而保证了算法的数值稳定性,仿真结果也说明了算法的数值稳定性.

3) 当 Systolic 阵列处理单元数小于待估参数个数时,可以令一个单元进行几个单元的所有运算.第四节性能分析中处理器的利用率与 n 成反比,看起来很低.实际上第四节估计值是离线值,在线时处理器的利用率应为离线的 n 倍,这样处理器的利用率就与 n 无关了,这点正是并行算法性能标准所要求的.

4) 文中的 Systolic 算法利用了矩阵的平方根分解,其中包括费机时的开方运算.数值仿真结果说明这并不太影响算法的速度.原因是整个算法中开方运算的数量较少.作者已利用矩阵的 UD 分解及修正 Givens 旋转对此进行了修正,其结果可见作者的另一篇论文^[8].

参 考 文 献

- [1] 胡保生,葛新科.并行与分布控制研究的现状及未来.控制理论与应用,1992,9(3):305—309
- [2] 葛新科,胡保生. Lyapunov 和 Ricatti 方程的并行算法. 全国控制理论与应用年会,南京,1992
- [3] Chisci, L. and Zappa, G. . A Systolic Architecture for Iterative LQ Optimization Automatica, 1991, 27(5):799—810
- [4] Gaston, F. M. F. and Irwin, G. W. . Systolic Kalman Filtering——An Overview. IEE Proc. pt. D, 1990, 37(4):235—244
- [5] Gaston, F. M. F. and Irwin, G. W. . Systolic Approach to Square Root Information Kalman Filtering. Int. J. Contr. , 1990, 50(1):225—248
- [6] Gentleman, W. M. and Kung, H. T. . Matrix Triangularization by Systolic Array. Proc. SPIE (real time signal processing IV), 1981, 298:19—26
- [7] Henkel, C. S. and Plemmons, R. T. . Recursive Least Squares on A Hypercube Multiprocessors Using the Covariance Factorization. SIAM J. Sci. Stat. Comp. , 1991, 12(1):95—106
- [8] 葛新科,胡保生.参数估计及自校正控制的 Systolic 算法.控制与决策年会论文集,1995

Systolic Algorithm for Parameter Estimation

GE Xinke and HU Baosheng

(System Engineering Institute Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: Based on the least square parameter estimation principle, a recursive parameter estimation algorithm on a triangular systolic array for single input and single output system is presented in this paper. First the recursive

formulas for the parameters to be estimated and covariance matrix are presented by using matrix decomposition, then by combining the characteristics of orthogonal plane rotation and the triangular systolic array, the corresponding recursive systolic parameter estimation algorithm is given, and finally some implementation performances are also presented. The simulation result is also presented. Since orthogonal plane rotation is used in the paper, the given algorithm is numerically stable.

Key words: systolic array; triangular decomposition; parameter estimation

本文作者简介

葛新科 1962年生, 1980年至1987年在西安交通大学数学系计算数学专业获学士及硕士学位, 1987年至1990年在西安交通大学数学系任教, 1990年至今为西安交通大学系统工程研究所博士生, 目前感兴趣的主要方向有: 参数估计及自校正控制中的并行算法, 格网滤波(lattice filtering)法在自适应控制中的应用, 控制中的神经网络研究等。

胡保生 1930年生, 1951年毕业于上海大同大学电机系, 1983年至1984年美国麻省理工学院访问科学家, 在自动控制及系统工程方面从事教学和科研工作40余年, 历任西安交通大学无线电工程系、信息与控制工程系主任, 现任系统工程研究所所长, CIMS研究中心主任, 目前感兴趣的方向有: 控制中的并行算法研究, CIMS, 机器人控制, 离散事件动态系统等, 在上述领域中已完成著作十部, 发表论文三百多篇。

会议简讯

中国自动化学会第十届青年学术年会于1994年8月21日至25日在古城西安西北工业大学召开, 此会由中国自动化学会主办, 西北工业大学自动控制系和陕西省自动化学会承办, 来自全国各地的与会代表共100余人, 另外还有专程从美国、香港等地回国参加会议的海外华人青年学者5人。

本届年会的显著特色之一是, 大会除邀请国内自动化领域著名老一辈专家和知名青年学者做大会报告外, 还特邀了在国际自动化领域有较大影响的海外华人青年学者回国参加会议并做大会报告, 与会代表一致反映本届年会组织工作好, 学术交流水平高, 特别是大会报告的安排、组织较好, 会议期间, 大会还组织与会代表参观了西安卫星测控中心和西北工业大学科技成果展览、国防重点实验室等。

本届年会的论文集《自动化理论、技术与应用》, 由西北工业大学出版社正式出版, 共收录包括线性、非线性系统; 鲁棒控制与最优控制; 自适应、变结构控制; 智能控制与模糊控制; 神经网络及其应用; 估计、辨识、故障诊断与容错控制; 建模、仿真、测试与数据处理; 机器人控制、图像处理与应用; 工业过程控制; 计算机应用; 航空、航天、航海及应用; 管理系统工程及其它等十二个领域的论文202篇。

(张友民供稿)