

一种带有模型误差反馈的鲁棒自校正控制器

邵 诚

顾兴源

(辽宁大学经济管理学院·沈阳, 110036) (东北大学自动控制系·沈阳, 110006)

摘要: 本文提出一种新的带有模型误差反馈的自校正控制算法, 并且证明了: 在有界外部扰动及由模型阶次不匹配产生未建模动态存在的条件下, 不论系统是否为最小相位, 本文算法都能保证闭环系统是鲁棒稳定的, 而且平均跟随误差趋于零. 仿真结果验证了此算法的有效性.

关键词: 自校正控制; 鲁棒稳定性; 未建模动态; 非最小相系统

1 引言

为建立更适于实际应用的自适应控制系统, 最近许多人考虑了各种条件下的鲁棒自适应控制问题. 文[1~3]证明了: 当实际系统关于输入输出是近似线性的情况下, 因模型阶次不匹配和有界外部扰动存在的鲁棒自适应控制问题可用下述模型描述

$$y(t) = \theta^T \varphi(t-1) + \eta(t), \quad (1a)$$

$$|\eta(t)| \leq \mu m(t) + M, \quad (1b)$$

$$m(t) \leq \sigma m(t-1) + \|\varphi(t-1)\| + m_0. \quad (1c)$$

式中 $\mu > 0, \sigma \in (0, 1), m_0 \geq 0, M \geq 0, \theta$ 为参数向量, $\varphi(t)$ 是以输入输出信号为分量的向量, $\eta(t)$ 是模型误差, 其含有由模型阶次不匹配产生的未建模动态. M 取决于外部扰动的大小. 文[1]在最小相及无外部扰动 ($M=0$) 的假设下, 采用模型参考自适应方法建立了闭环系统的鲁棒稳定性. 文[2, 3]考虑了同时含有未建模动态和有界外部扰动的情况; 并在无扰动条件下 ($M=0$), 保证了跟随误差趋于零. 由于文[1~3]采用的方法对系统参数的先验知识要求较多, 因此限制了它们的实际应用. 最近文[4]将模型误差作为测量信号引入控制律, 在较为松弛的条件下建立了当 $M=0$ 时的鲁棒稳定性及平均误差趋于零.

本文的工作在于: 1) 允许系统模型含有由模型阶次不匹配产生的未建模动态和有界的外部扰动; 2) 自适应算法对系统不要求太多的先验知识, 因而更适于实际应用; 3) 保证了鲁棒稳定性及平均跟随误差趋于零.

2 系统描述和自校正算法

设受控对象是可由(1)式描述的带有可测输入 $u(t)$ 、可测输出 $y(t)$ 的离散时间系统, 并记

$$\theta^T = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n),$$

$$\varphi(t-1)^T = (y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n-1)).$$

取单位延迟算子 q^{-1} 的多项式

$$A(q^{-1}) = 1 - a_1 q^{-1} - \dots - a_n q^{-n}, \quad B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}.$$

则(1a)可写成

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \eta(t). \quad (2)$$

作如下假设

A1) 适于模型(1)的阶次 n_a, n_b 是已知的;

A2) 参数 σ, μ, M, m_0 是已知的.

假设 A1), A2) 是文[1~3]对模型(1)的基本要求. 此外, 还要求关于系统参数的其它更精确的知识. 本文为了给出更适于实际应用的算法, 不作这样的假设.

设 $P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + \dots + p_n q^{-n}$, 为一已知多项式, 由(2)

$$\begin{aligned} Py(t) &= (P - A)y(t) + Bu(t-1) + \eta(t) \\ &= Hy(t) + Bu(t-1) + \eta(t). \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $H = h_1 q^{-1} + \dots + h_n q^{-n}$, $n_0 = \max(n_a, n_b)$, h_i 对应 $P - A$ 的系数. 令 $\psi(t) = Py(t)$, $\theta_0^T = (h_1, \dots, h_n, b_1, \dots, b_n)$, $x(t-1)^T = (y(t-1), \dots, y(t-n_0), u(t-1), \dots, u(t-n_b-1))$, 则(3)式可写成

$$\psi(t) = \theta_0^T x(t-1) + \eta(t). \quad (4)$$

定义

$$\tilde{m}(t) = \sigma \tilde{m}(t-1) + \|x(t-1)\| + m_0, \quad (5a)$$

$$E(t) = \mu \tilde{m}(t) + M. \quad (5b)$$

于是由(1b), (1c)知: 若选择初始的 $\tilde{m}(0) \geq m(0)$, 则对所有 $t \geq 1$, $\tilde{m}(t) \geq m(t)$, $|\eta(t)| \leq E(t)$.

自校正控制目的是对于由模型(1)描述的被控对象, 在参数未知及有未建模动态和有界扰动存在时, 要使闭环系统跟随有界的参考信号 $y^*(t)$, 并使跟随误差尽可能小. 采用如下带有相对死区的最小二乘形式的递推算法估计 θ_0

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \lambda(t)L(t)e(t), \quad (6a)$$

$$e(t) = \psi(t) - \hat{\theta}(t-1)^T x(t-1), \quad (6b)$$

$$L(t) = K(t-2)x(t-1)/[\beta(t) + x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)], \quad (6c)$$

$$K(t-1) = K(t-2) - \lambda(t)L(t)[\beta(t) + x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)]L(t)^T. \quad (6d)$$

其中 $K(t)$ 是以任意正定的 $K(-1)$ 为初值的矩阵序列, $\lambda(t)$ 和 $\beta(t)$ 为可调参数, 且由下式给定

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } |e(t)| \leq \mu E(t), \\ r, & \text{否则, } r \in [\sigma_0, 3(1 - \sigma_0)/4], \end{cases} \quad (6e)$$

$$\beta(t) \in (0, M_\beta). \quad (6f)$$

式中 $0 < \sigma_0 < \frac{3}{7}$, $M_\beta > 0$. 控制输入由下式给出

$$\hat{\theta}(t)^T x(t) + G(q^{-1})(u(t) - u(t-1)) = P(q^{-1})y^*(t+1) - \hat{D}(t), \quad (7a)$$

$$\hat{D}(t) = \psi(t) - \hat{\theta}(t)^T x(t-1). \quad (7b)$$

其中 $G(q^{-1})$ 为由设计者给定的多项式. $\hat{D}(t)$ 可以看作是模型误差的估计值. 后面的鲁棒稳定性分析和仿真结果表明: 正是由于本文在控制律中引入 $\hat{D}(t)$ 作为反馈, 使得闭环系统不仅是鲁棒稳定的, 而且能够消除由于外部扰动存在、参数估计不能收敛到真值等原因产

生的稳态误差. 关于多项式 P, G 作如下假设:

A3) $f(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1}) + \bar{G}(q^{-1})A(q^{-1})$, $(\bar{G}(q^{-1}) = G(q^{-1})(1 - q^{-1}))$ 是稳定的, 即 $f(z) \neq 0, |z| \leq 1$.

根据系统零点和极点的部分先验知识, 这样的 P, G 是容易确定的^[5].

3 鲁棒稳定性分析

先给出几个引理.

引理 1 若参数估计算法(6)用于系统(1), 则有如下性质:

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)\varepsilon(t)^2}{\beta(t) + x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)} = 0, \quad (8)$$

$$2) |(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1))^T x(t-1)| \leq \alpha(t) \|x(t-1)\|, \quad \alpha(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), \quad (9)$$

3) $\hat{\theta}(t)$ 有界.

证 1) 利用矩阵逆引理不难验证(6d)等价于

$$K(t-1)^{-1} = K(t-2)^{-1} + \frac{\lambda(t)x(t-1)x(t-1)^T}{\beta(t) + (1 - \lambda(t))x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)}. \quad (10)$$

记 $\bar{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta_0$, 由式(6a)~(6d)和(4)有

$$K(t-1)^{-1}\bar{\theta}(t) = K(t-2)^{-1}\bar{\theta}(t-1) + \lambda(t)K(t-1)^{-1}L(t)\eta(t). \quad (11)$$

定义 $V(t) = \bar{\theta}(t)^T K(t-1)\bar{\theta}(t)$, 则由式(10), (11)能够建立

$$\begin{aligned} V(t) - V(t-1) &= -\frac{3\lambda(t)[\beta(t) + (1 - 4\lambda(t)/3)x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)]\varepsilon(t)^2}{4[\beta(t) + x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)][\beta(t) + (1 - \lambda(t))x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)]} \\ &\quad - \frac{\lambda(t)[\varepsilon(t)^2/4 - \eta(t)^2]}{\beta(t) + (1 - \lambda(t))x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

由(6e)知: 当 $\lambda(t) \neq 0$ 时, $1 - 4\lambda(t)/3 \geq \sigma_0$, $\varepsilon(t)^2/4 > E(t)^2 \geq \eta(t)^2$. 故由(10)和(12)式知: 对任意初始的 $K(-1) > 0$, $V(t)$ 是单调递减的非负序列, 因而收敛. 于是由(12)式有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)[\beta(t) + (1 - 4\lambda(t)/3)x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)]\varepsilon(t)^2}{4[\beta(t) + x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)][\beta(t) + (1 - \lambda(t))x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)]} \\ = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

据式(6e)可建立如下不等式

$$0 < \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0} \leq \frac{\beta(t) + (1 - 4\lambda(t)/3)x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)}{\beta(t) + (1 - \lambda(t))x(t-1)^T K(t-2)x(t-1)} \leq 1. \quad (14)$$

由(13), (14)式即可得到(8)式.

2) 由式(6a), (6d)(8)即证.

3) 由 $V(t) - V(t-1) \leq 0$ 及(10)式即证. 证毕.

引理 2 若自校正算法(6), (7)用于系统(1), 则闭环系统满足

$$(A\bar{G} + BP)e(t) = B[\Delta e(t) + (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2)] + \delta_1(t), \quad (15)$$

$$(A\bar{G} + BP)u(t-1) = A[\Delta e(t) + (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2)] + \delta_2(t). \quad (16)$$

式中 $e(t) = y(t) - y^*(t)$, $\Delta = 1 - q^{-1}$, $\delta_i(t)$ ($i=1, 2$) 满足

$$|\delta_i(t)| \leq c_1 + c_2 \mu \max_{0 \leq s \leq t} \tilde{m}(s). \quad (17)$$

c_1, c_2 为非负常数且 c_2 与 μ 无关.

证 由式(2),(7)有

$$Ae(t) = Bu(t-1) + \eta(t) - Ay^*(t), \quad (18)$$

$$\bar{G}u(t-1) = -Pe(t) + \Delta e(t) + (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2). \quad (19)$$

利用(18),(19)式有

$$(A\bar{G} + BP)e(t) = B[\Delta e(t) + (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2)] + \bar{G}(\eta(t) - Ay^*(t)), \quad (20)$$

$$(A\bar{G} + BP)u(t-1) = A[\Delta e(t) + (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2)] + P(Ay^*(t) - \eta(t)). \quad (21)$$

令 $\delta_1(t) = \bar{G}(\eta(t) - Ay^*(t))$, $\delta_2(t) = P(Ay^*(t) - \eta(t))$, 即得(15),(16)式. 再由(5b)及 $|\eta(t)| \leq E(t)$ 可验证 $\delta_i(t) (i=1,2)$ 满足(17)式. 证毕.

引理 3 若对于非负实序列 $Z(t), a(t), b(t), d(t)$ 存在非负常数 K_1, K_2, K_3 使得

$$Z(t) \leq K_1 + K_2 \max_{0 \leq s \leq t} \{a(s)\} + K_3 \max_{0 \leq s \leq t} \{b(s) + d(s)Z(s-1)\} \quad (22)$$

且 $d(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 则必存在非负常数 K_4, K_5, K_6 使得

$$Z(t) \leq K_4 + K_5 \max_{0 \leq s \leq t} \{a(s)\} + K_6 \max_{0 \leq s \leq t} \{b(s)\}. \quad (23)$$

证 参见文[4].

本文算法的鲁棒稳定性结果由如下定理给出.

定理 1 在假设 A1)~A3)下, 若自校正算法(6),(7)用于系统(1), 则存在充分小的 $\mu_0 > 0$, 使得对任何 $\mu \in [0, \mu_0]$,

1) 闭环系统是鲁棒稳定的;

2) 跟随误差满足

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e(t) = 0. \quad (24)$$

证 1) 由假设 A3), 式(3),(15),(16)知: 存在非负常数 $K'_1, K'_2, K'_3, K''_1, K''_2, K''_3$ 使得

$$|e(t-1)| \leq K'_1 + K'_2 \max_{0 \leq s \leq t} |\delta_1(s)| + K'_3 \max_{0 \leq s \leq t} [|\Delta e(s)| + \alpha(s-1) \|x(s-2)\|], \quad (25)$$

$$|u(t-1)| \leq K''_1 + K''_2 \max_{0 \leq s \leq t} |\delta_2(s)| + K''_3 \max_{0 \leq s \leq t} [|\Delta e(s)| + \alpha(s-1) \|x(s-2)\|], \quad (26)$$

于是对任何有界的 $y^*(t)$, 存在非负的 K_1, K_2, K_3 使得

$$\|x(t-1)\| \leq K_1 + K_2 \max_{0 \leq s \leq t} \delta(s) + K_3 \max_{0 \leq s \leq t} [|\Delta e(s)| + \alpha(s-1) \|x(s-2)\|]. \quad (27)$$

其中 $\delta(t) = \max\{|\delta_1(t)|, |\delta_2(t)|\}$, 由引理 3 和式(17)有

$$\begin{aligned} \|x(t-1)\| &\leq K_4 + K_5 c_1 + \mu K_5 c_2 \max_{0 \leq s \leq t} \tilde{m}(s) + K_6 \max_{0 \leq s \leq t} |\Delta e(s)| \\ &= K_7 + \mu K_8 \max_{0 \leq s \leq t} \tilde{m}(s) + K_6 \max_{0 \leq s \leq t} |\Delta e(s)|. \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $K_7 = K_4 + K_5 c_1$, $K_8 = K_5 c_2$ 且 K_8 与 μ 无关. 由(5a)有

$$\tilde{m}(t) \leq \sigma \tilde{m}(0) + \frac{1}{1-\sigma} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| + \frac{m_0}{1-\sigma}, \quad (29)$$

代入(28)有

$$\|x(t-1)\| \leq K_9 + \frac{\mu K_8}{1-\sigma} \max_{0 \leq s \leq t-1} \|x(s)\| + 2K_6 \max_{0 \leq s \leq t} |\varepsilon(s)|. \quad (30)$$

其中 K_9 为非负常数. 若 μ_0 充分小使得 $\mu_0 K_8 / (1-\sigma) \leq \frac{1}{2}$, 那么对任何 $\mu \in [0, \mu_0]$ 有

$$\max_{0 \leq s \leq t-1} \|x(s)\| \leq 2K_9 + 4K_6 \max_{0 \leq s \leq t} |\varepsilon(s)|. \quad (31)$$

下面来证明 $\varepsilon(t)$ 是有界的. 如若不然, 则对任何自然数 n 存在

$$t_n = \min\{t \mid |\varepsilon(t)| \geq n, t \geq 0\}.$$

且有: $\max_{0 \leq s \leq t_n} |\varepsilon(s)| = |\varepsilon(t_n)|$; $|\varepsilon(t_n)| \rightarrow \infty$; $t_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). 现将 $\{t_n\}$ 分成如下两个子集

$$T_1 = \{t_n \mid \lambda(t_n) \neq 0\}, \quad T_2 = \{t_n \mid \lambda(t_n) = 0\}$$

若 T_1 为无穷集, 则 T_1 可表为序列 $\{t_n^{(1)}\}$, 由式(6e), (6d), (31)知当 n 充分大时有

$$\frac{\lambda(t_n^{(1)}) \varepsilon(t_n^{(1)})^2}{\beta(t_n^{(1)}) + x(t_n^{(1)} - 1)K(t_n^{(1)} - 2)x(t_n^{(1)} - 1)} \geq \frac{\sigma_0}{1 + \lambda_{\max}(K(-1))(1 + 4K_6)^2} > 0. \quad (32)$$

式中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值; 此与式(8)矛盾! 故 T_1 至多为有限集. 又当 $t_n \in T_2$ 时, 由式(6e), (29), (31)有

$$|\varepsilon(t_n)| \leq 2M + 2\mu\tilde{m}(0) + \frac{2\mu(m_0 + 2K_9)}{1-\sigma} + \frac{8\mu K_6}{1-\sigma} |\varepsilon(t_n)|. \quad (33)$$

当 μ_0 充分小使 $8\mu_0 K_6 / (1-\sigma_0) \leq \frac{1}{2}$, 对任何 $\mu \in [0, \mu_0]$ 有

$$|\varepsilon(t_n)| \leq 4M + 4\mu_0\tilde{m}(0) + \frac{2\mu_0(m_0 + 2K_9)}{1-\sigma}. \quad (34)$$

知 $\varepsilon(t)$ 在 T_2 上有界. 到此知 $\varepsilon(t)$ 在 $T_1 + T_2$ 上有界, 此与 $\{t_n\}$ 的定义矛盾! 故 $x(t)$ 的有界性得证.

3) 对任何时刻 $T > 1$, 由(19)式有

$$\sum_{i=1}^T P e(t) = \varepsilon(T) - \varepsilon(0) + \sum_{i=1}^T (\hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2))^T x(t-2) - Gu(T-1) - Gu(0).$$

既然闭环系统的所有信号是有界的, 故由(9)式有

$$P(1) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T e(t) = 0.$$

据假设 A3) 有 $P(1) \neq 0$, 从而式(24)得证. 证毕.

注 对于定常的参考信号和恒值的外部扰动, 本文算法能够消除稳态跟随误差. 事实上, 由定理 1 知闭环系统是 BIBO 稳定的, 所以此时闭环系统能够达到稳态. 由(24)式有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T e(t) = 0.$$

4 仿真结果

例 设受控对象为如下形式的非最小相系统

$$y(t) = 0.9y(t-1) + u(t-1) - 1.9u(t-2) + 0.6u(t-3) + \zeta(t).$$

其中 $\zeta(t) = \sum_{k=0}^t 0.2^{t-k} \xi(k)$, $\xi(t)$ 是幅值不超过 0.2 的随机扰动. 此系统含有一个不稳定的零点 $q_0 = 1.5$, 先考虑模型阶次匹配的情况. 此时模型误差 $\eta(t) = \zeta(t)$. 图 1 是使用文[6]

的死区辨识方法及 Clarke 的广义最小方差控制器^[5]的系统输出. 图 2 是本文方法的系统输出. 比较二者发现: 由于本文使用了误差反馈 $\hat{D}(t)$, 所以尽管使用了死区辨识方法, 但系统没有稳态误差. 对于模型阶次不匹配的情况, 采用如下模型设计

$$y(t) = a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \eta(t).$$

此时模型误差 $\eta(t)$ 含有未建模动态和有界扰动. 采用本文方法的仿真结果见图 3. 可见本文方法能够获得比较满意的控制性能.

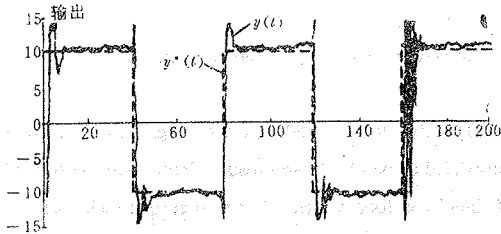


图 1. 使用死区辨识方法^[6]和广义最小方差控制^[5]的输出

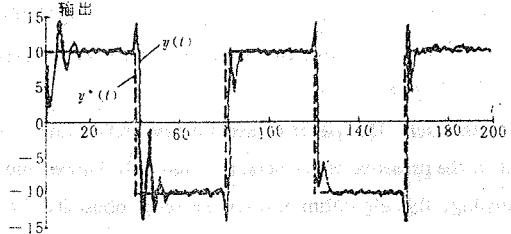


图 2 使用本文方法的系统输出

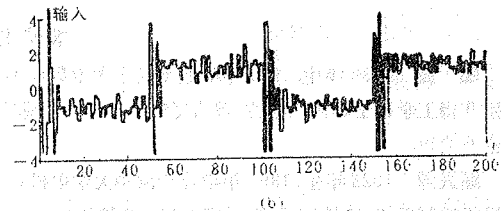
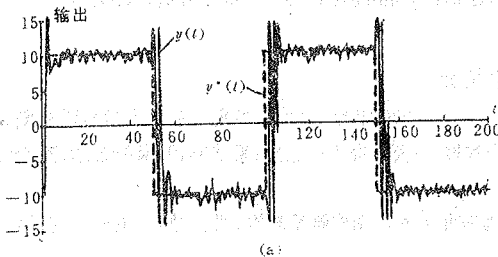


图 3 使用降阶模型设计的仿真结果

5 结 论

本文提出了一种新的带有模型误差反馈的自校正控制算法. 其主要优点是: 1) 适于非最小相系统; 2) 当使用低阶模型去控制高阶线性系统时, 在有未建模动态和有界扰动时, 闭环系统是鲁棒稳定的; 3) 系统的平均跟随误差趋于零. 因此本文方法能够消除闭环系统可能存在的稳态偏差.

参 考 文 献

- [1] Kreisselmeier, G. and Anderson, B. D. O.. Robust Model Reference Adaptive Control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31:127-133
- [2] Middleton, R. H., Goodwin, G. C., Hill, D. J. and Mayne, D. Q.. Design Issues in Adaptive Control. IEEE Trans Automat. Contr., 1988, AC-33:50-58
- [3] Middleton, R. H., Goodwin, G. C. and Wang, S.. On the Robustness of Adaptive Controllers Using Relative Dead-zones. Automatica, 1989, 25:889-896
- [4] 顾兴源, 邵诚. 离散线性系统的鲁棒自适应控制. 1992 年中国控制与决策学术年会论文集, 哈尔滨, 108-114
- [5] Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J.. Self-Tuning Controller. IEE Proc. D. Control Theory & Application. 1975, 122: 929-934
- [6] Goodwin, G. C. and Sin, K. S.. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ,

1994, 90—91

A Robust Self-Tuning Controller with Modeling Error Feedback

SHAO Cheng

(College of Economics and Management, Liaoning University • Shenyang, 110036, PRC)

GU Xingyuan

(Department of Automatic Control, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: This paper presents a new self-tuning control algorithm with modeling error feedback. It is shown that in the presence of bounded external disturbances and unmodeled dynamics which results from model order mismatching, this algorithm ensures not only robust stability of the closed loop system, but also zero tracking error in the average meaning whether the plant is minimum phase or not. Simulation results demonstrate effectiveness of the self-tuning control algorithm.

Key words: self-tuning control; robust stability; unmodeled dynamics; nonminimum phase system

本文作者简介

邵 诚 1958 年生. 1981 年毕业于辽宁大学数学系, 理学学士. 1986 年和 1992 年毕业于东北大学自动控制系统, 分别获得工学硕士和博士学位. 现为辽宁大学经济管理学院副教授. 主要研究方向包括: 系统辨识, 鲁棒自适应控制的理论及应用.

顾兴源 1928 年生. 1951 年毕业于清华大学电机系, 现为东北大学自动控制系统教授, 博士导师. 主要研究领域为计算机控制系统, 系统辨识, 自适应控制和鲁棒控制.