具有多层次变动环境的 CIMS 可靠性的位相分析*

李泉林
(燕山大学数学系·秦皇岛,066004)

摘要:本文研究了多层次变动环境,带有有限缓冲库的 CIMS 可靠性问题. 其中假定两级工作站的寿命都服从指数分布,其它所有随机因素都是马氏调节泊松过程. 利用准生灭过程理论,给出了系统的各种可靠性指标和生产指标,给出了由环境小变化而引起的系统指标扰动的界值,讨论了系统运行中的局部渐近性态.

关键词:工作站;变动环境;马氏调节泊松过程;位相分布

1 引　言

排队论和马尔可夫过程理论是研究 CIMS 生产线可靠性问题的一种重要方法. 目前用这种方法已经取得了不少成果[1~4]. 但是这些工作[2]在近似局限下大都假定了所有随机变量服从指数分布,而目前对具有非指数分布的 CIMS 可靠性问题还所知甚少. 因此研究一种既使随机变量非指数化又使模型结构线性化的 CIMS 可靠性,这在理论上是十分必要的[4].

本文在 CIMS 生产线中引入了马氏调节泊松过程,将各站的加工过程、修理过程及其相应周围的变动环境等给出了一致而简洁的矩阵统一. 利用准生灭过程理论,给出了各种可靠性指标和生产指标的精确解,给出了系统随环境变动的扰动界和系统的局部渐近性态.

2 CIMS 生产线的数学描述

马氏调节泊松过程是一种特殊的二重随机过程 $X(J)$,通常被不可约简表为$[\alpha,(\theta,\Lambda)]$. 其中 α,θ 分别为一个有限态的调节马氏过程的初始概率向量和无穷小生成元. Λ 是泊松过程 $X(J)$的到达率矩阵. 其详见文献[5]的 Chapter5.

从实际意义看,θ 表示变动环境,Λ 表示由环境状态引起的不同类别达到的速率. $(\alpha,\theta-\Lambda)$是一个 pH 分布的不可约表示.

2.1 模型假定

设有两级可修的工作站 M_1,M_2 串联制造系统,其中间串联了一个容量为 N 的缓冲库. 有两个修理工,分别保证失效后的 M_1,M_2 立即被修理.

M_1,M_2 的寿命均服从指数分布,失效率分别为 α_1,α_2.

失效后的 M_1,M_2 的修理过程,每个工件在 M_1,M_2 中的加工过程都是马氏调节泊松过程. 它们分别简记为不可约表示

---

* 中国科学院自动化所复杂系统控制开放实验室基金资助课题.
本文于1993年8月9日收到. 1994年5月20日收到修改稿.

$$[\beta_1,(\theta_1,v_1)],[\tau_1,(G_1,\Lambda_1)];[\beta_2,(\theta_2,v_2)],[\tau_2,(G_2,\Lambda_2)].$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\tau_1,\tau_2$ 分别为 k,l,m,n 维的初始概率向量. $\theta_1,\theta_2,G_1,G_2$ 分别 k,l,m,n 阶的不可约无穷小生成元. $v_1,v_2,\Lambda_1,\Lambda_2$ 分别为 k,l,m,n 阶的对角矩阵，其对角线上所有元素都为正数.

为了分析问题的需要，这里给出一些假设：

缓冲库传递工件的过程无故障. 工件从缓冲库中取出或存入的时间很短，可忽略不计(相对于生产率而言).

首级工作站不因缺料而空闲(即有足够多的原材料)，末级工作站输出无阻塞(即有足够大的成品库).

当缓冲库装满时，则首级工作站出现阻塞而停车待命，末级工作站继续工作；当缓冲库空仓时，则末级工作站出现饥饿而停车待命，首级工作站继续工作.

任一工作站在停车待命期间既不失效又不劣化. 其修复如新.

所有随机变量之间都相互统计独立.

2.2 广义加工时间

由于两级工作站是可失效和可修理的，所以用 x,y 分别表示在 M_1,M_2 中从开始对工件加工直到加工完成时刻的时间间隔. 其间包括了工作站可能发生失效的修理时间.

我们把 x,y 统称为工件的广义加工时间.

定理 1　设 $k+m,l+n$ 阶方阵为

$$T=\begin{bmatrix}G_1-\Lambda_1-\alpha_1 I_1 & \alpha_1 e_m\beta_1\\ v_1^0\tau_1 & \theta_1-v_1\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}G_2-\Lambda_2-\alpha_2 I_2 & \alpha_2 e_n\beta_2\\ v_2^0\tau_2 & \theta_2-v_2\end{bmatrix}.$$

其中，I_1,I_2 为单位矩阵，e_m,e_n 为分量全为 1 的列向量，$v_1^0=v_1e_k,v_2^0=v_2e_l$. 则 x,y 分别服从 $k+m,l+n$ 阶的 pH 分布，其不可约表示为$[(\tau_1,0),T],[(\tau_2,0),R]$. 并且

$$E[x]=-\frac{1}{\tau_1(G_1-\Lambda_1)^{-1}e_m}\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1(\theta_1-v_1)^{-1}e_k}\right),$$

$$E[y]=-\frac{1}{\tau_2(G_2-\Lambda_2)^{-1}e_n}\left(1-\frac{\alpha_2}{\beta_2(\theta_2-v_2)^{-1}e_l}\right).$$

证　我们视工作站的工作和修理为两个状态，视工件完成加工进入吸收态，则由文献[6]Chapter2 可知，x,y 分别服从 $k+m,l+n$ 阶的 pH 分布. 注意状态之间的转移关系，即可写出 T,R 的表达式. 由文献[6]即得 $E[x]$和 $E[y]$.

2.3 系统的无穷小生成元

由于系统首端有足够多的原材料，末端有足够大的成品库，所以系统的运行过程可由缓冲库中存件个数的变化过程直接表出.

用 $J(t)$表示时刻 t 缓冲库中的存件个数，则$\{J(t),t\geqslant 0\}$就构成了状态空间 $\mathcal{J}=\{0,1,2,\cdots,N,N+1\}$上的随机过程. 其中，

状态 0：表示库内和 M_2 中都没有工件.

状态 i：表示库内有 $i-1$ 个工件，M_2 中有一个工件，$1\leqslant i\leqslant N+1$.

显然，$\{J(t),t\geqslant 0\}$在$\tilde{J}$中构成了一个闭环排队网络. 由定理1知，$\{J(t),t\geqslant 0\}$在$\tilde{J}$上是一个准生灭过程，其无穷小生成元为

$$\theta=\begin{bmatrix} T\otimes\tilde{I}_2 & (T^0w_1)\otimes\tilde{I}_2 & & & \\ \tilde{I}_1\otimes(R^0w_2) & T\oplus R & (T^0w_1)\otimes\tilde{I}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{I}_1\otimes(R^0w_2) & T\oplus R & (T^0w_1)\otimes\tilde{I}_2 \\ & & & \tilde{I}_1\otimes(R^0w_2) & \tilde{I}_1\oplus R \end{bmatrix}.$$

其中 $T^0=-T\tilde{e}_1$；$R^0=-R\tilde{e}_2$； $w_1=(\tau_1,0)$，$w_2=(\tau_2,0)$； $\tilde{I}_1,\tilde{I}_2$均为单位矩阵.

$A\otimes B$表示矩阵A,B的Kronecker积，$A\oplus B=I_A\otimes B+A\otimes I_B$，即为Kronecker和.

显然，$\{J(t),t\geqslant 0\}$是一个有限态时齐马氏链，其无穷小生成元为θ. 由此系统一定能达到平稳状态.

3 系统的稳态指标

设马氏链θ的平稳概率向量为$\Pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_N,\pi_{N+1})$，其中$\pi_i$，$0\leqslant i\leqslant N+1$，均为$(k+m)(l+n)$维行向量. 则线性方程组

$$\begin{cases} \Pi\theta=0, \\ \sum_{i=0}^{N+1}\pi_i(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2)=1, \end{cases}\quad \text{存在唯一非负解.}$$

由于这个线性方程组存在唯一非负解，所以在矩阵θ中至少存在一列列向量，不妨记为第i_0列列向量，使其用$(k+m)(l+n)(N+2)$维列向量$(1,1,\cdots,1,1)'$全部替换后得到一个新的$(k+m)(l+n)(N+2)$阶方阵$\tilde{\theta}$，则$\tilde{\theta}$是可逆矩阵.

用$\langle\tilde{\theta}_i\rangle$表示矩阵$\tilde{\theta}$的第$i$行第$i_0$列元素的代数余子式.

$$\pi_s=(\pi_s^{(1)},\pi_s^{(2)},\pi_s^{(3)},\cdots,\pi_s^{(r)}),$$
$$0\leqslant s\leqslant N+1,\quad r=(k+m)(l+n).$$

定理2 设$i=(k+m)(l+n)s+j$，$0\leqslant s\leqslant N+1$. $1\leqslant j\leqslant(k+m)(l+n)$，则$\pi_s^{(j)}=\dfrac{\langle\tilde{\theta}_i\rangle}{\det\langle\tilde{\theta}\rangle}$.

定理3 设系统在平稳状态下，则

1) 系统的稳态可用度为

$$A=\sum_{s=1}^{N+1}\left[\sum_{j=1}^{mn}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}+\sum_{j=mn+ml+1}^{mn+ml+kn}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}\right].$$

2) 系统的稳态故障频度为

$$W_f=\alpha_1\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=1}^{mn}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}+\alpha_2\sum_{s=1}^{N+1}\left[\sum_{j=1}^{mn}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}+\sum_{j=mn+ml+1}^{mn+ml+kn}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}\right].$$

证 由于两级生产线正常工作的状态包括：1) M_1,M_2都正常工作，并且工作站M_2不空闲，2) M_1故障M_2正常工作，并且工作站M_2不空闲. 注意到$(W_1,R_1)\otimes(W_2,R_2)=(W_1W_2,W_1R_2,R_1W_2,R_1R_2)$，所以由$\pi$的位相结构可知，系统的可用度和故障频度都集中于状态W_1W_2和R_1W_2及其位相段上. 由此计算即得定理3.

设 $\quad \Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m),\quad \Lambda_2=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$

$$T^0=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad R^0=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

定理 4　M_1 的稳态生产率为

$$W_A=\sum_{s=0}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+l}\lambda_i\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+ij}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}.$$

M_2 的稳态生产率为

$$W_B=\sum_{s=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+ij}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{d=m(n+l)+1}^{m(n+l)+ij}\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+d}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}\right].$$

系统的稳态生产率为　　$W_s=\min\{W_A,W_B\}$.

证　注意到广义加工时间 x,y 对应的 T^0,R^0 是由加工位相部分的 A_1,A_2 给出，类似于定理 2 和文献[1]可得到.

对于 CIMS 生产线，下面指标也是很关心的：

1）平均库存工件数，$N_W=\sum_{s=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{r}s\frac{\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{\det(\tilde{\theta})}$；

2）工件在线中的平均加工时间，$T_D=\frac{1}{W_A}+\frac{1}{W_B}$；

3）工件在线中的平均库存时间为

$$T_B=\frac{\sum_{s=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{r}s\langle\tilde{\theta}_{rs+j}\rangle}{W_s\det(\tilde{\theta})}.$$

4　系统稳态指标的随机扰动估计

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则定义 $\vec{a}$ 和 A 的范数分别为

$$\|\vec{a}\|=\sum_{m=1}^{n}|a_m|,\quad \|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

在马氏调节泊松过程下，这个系统共有四个不同层次的马氏变动环境 $\theta_1,G_1,\theta_2,G_2$. 现分别给这四个环境的一个小扰动增量 $\Delta(\theta_1),\Delta(G_1),\Delta(\theta_2),\Delta(G_2)$，则 $\theta_1+\Delta(\theta_1),G_1+\Delta(G_1)$，$\theta_2+\Delta(\theta_2),G_2+\Delta(G_2)$ 又构成修理过程和加工过程的一类新环境. 其环境扰动的小增量对系统无穷小生成元的影响为

$$\Delta(\theta)=\theta(\theta_1+\Delta(\theta_1),\theta_2+\Delta(\theta_2),G_1+\Delta(G_1),G_2+\Delta(G_2))-\theta(\theta_1,\theta_2,G_1,G_2)$$

$$=\begin{bmatrix}\Delta(T)\otimes\tilde{I}_2 & & & & \\ & \Delta(T)\oplus\Delta(R) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Delta(T)\oplus\Delta(R) & \\ & & & & \tilde{I}_1\otimes\Delta(R)\end{bmatrix}.$$

其中　　$\Delta(T)=\begin{bmatrix}\Delta(G_1) & \\ & \Delta(\theta_1)\end{bmatrix}$，　$\Delta(R)=\begin{bmatrix}\Delta(G_2) & \\ & \Delta(\theta_2)\end{bmatrix}$.

$\Delta(\tilde{\theta})$表示把矩阵$\Delta(\theta)$的第i_0列所有元素都化为0后所得的一个新矩阵．一般要求$\|\Delta(\tilde{\theta})\|<\delta$，$\delta$为正常数．$K(\tilde{\theta})=\|\tilde{\theta}^{-1}\|\ \|\tilde{\theta}\|$．

我们称δ为系统的环境设计参数，称$K(\tilde{\theta})$为系统的固有结构参数．

4.1 环境扰动

环境扰动集中于矩阵$\Delta(\tilde{\theta})$．它包括两个方面，一者是环境自身的不稳定随机变化，另者是观察测试和数据收集的人为误差．

系统稳态可用度和生产率的扰动分别表为

$$\Delta(A)=A(\theta_1+\Delta(\theta_1),\theta_2+\Delta(\theta_2),G_1+\Delta(G_1),G_2+\Delta(G_2))-A(\theta_1,\theta_2,G_1,G_2),$$

$$\Delta(W_s)=W_s(\theta_1+\Delta(\theta_1),\theta_2+\Delta(\theta_2),G_1+\Delta(G_1),G_2+\Delta(G_2))-W_s(\theta_1,\theta_2,G_1,G_2).$$

定理 5 设$\|\Delta(\tilde{\theta})\|<\min\left\{\delta,\dfrac{1}{\|\tilde{\theta}^{-1}\|}\right\}$，则

1) $$|\Delta(A)|\leqslant\frac{K(\tilde{\theta})\dfrac{1}{\|\tilde{\theta}\|}}{1-K(\tilde{\theta})\dfrac{\delta}{\|\tilde{\theta}\|}}\delta,$$

2) $$|\Delta(W_s)|\leqslant 2\max\{\|A_1^0\|,\|A_2^0\|\}\frac{K(\tilde{\theta})\dfrac{1}{\|\tilde{\theta}\|}}{1-K(\tilde{\theta})\dfrac{\delta}{\|\tilde{\theta}\|}}\delta.$$

4.2 精度扰动

当$(k+m)(l+n)(N+2)$很大时，由定理1知，要求解线性方程组$\Pi\theta=0$，$\sum\limits_{i=0}^{N+1}\pi_i(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2)=1$，其计算量是相当地大．因此我们有必要研究在计算机辅助下高精度和快速收敛的计算方法．这里讨论了计算精度的系统指标扰动问题．

设$\hat{\Pi}$是在计算机辅助下线性方程组$\Pi\theta=0$，$\sum\limits_{i=0}^{N+1}\pi_i(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2)=1$的一个近似解，$L=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{i_0-1\text{个}},1,0,\cdots,0)-\hat{\Pi}\tilde{\theta}$为一个剩余向量．一般要求$\|L\|<\sigma$，$\sigma$为正常数．

定理 6 设$\|L\|<\sigma$，则

1) $|\Delta(A)|\leqslant K(\tilde{\theta})\sigma$，

2) $|\Delta(W_s)|\leqslant 2\max\{\|A_1^0\|,\|A_2^0\|\}K(\tilde{\theta})\sigma$.

4.3 系统设计的评价标准

从定理5和定理6不难看出，系统固有结构参数$K(\tilde{\theta})$对系统稳态可用度和生产率的扰动有显著影响．一个好的系统设计就是保证系统稳态可用度和生产率随着环境的小变化而扰动不显著，而且也保证在计算上有较高的精度．于是我们可以得出：

1) 当$K(\tilde{\theta})$较大时，系统设计不佳而有待改进系统的联接结构和参数取值．

2) 当$K(\tilde{\theta})$较小时，系统设计较好．

3) 当$K(\tilde{\theta})=1$时，系统设计最优．

5 系统局部的渐近性态

定义 1 设X是一个随机变量，ξ,η是两个正常数，并且当$t\to+\infty$时，$P\{X>t\}=\xi e^{-\eta t}+o(e^{-\eta t})$，则称$X$为渐近指数的随机变量．

定理 7　设 J_A, J_B 均为状态空间 $\mathfrak{J}$(可为由位相加细状态)的子集，$J_A \cap J_B = \Phi$，$J_A \cup J_B = \mathfrak{J}$，$x_s$ 表示系统从 J_A 出发首次到达 J_B 的时间，则 x_s 是渐进指数的随机变量.

由定理 7 知，在这个 CIMS 生产线中，许多局部运行都具有“渐近指数”特征. 例如，生产线的畅通期，生产线首次停工时间，修理工的忙期等等.

6 结　论

本文针对随机因素的非指数化和系统分析的线性化的这一重要研究思想，用马氏调节泊松过程和准生灭过程理论对 CIMS 生产线的性态、结构和设计等进行了深入分析. 由于位相分布在非负随机变量中稠密，所以本文的结果能很好地描述 CIMS 生产线的环境，加工和修理等实际因素，具有较好的实用性.

参 考 文 献

[1] 疏松桂. 带有缓冲库的综合制造系统(CIMS)分析及其可靠性的研究. 自动化学报，1992，1：15—22

[2] 谭民. CIMS 串行生产线可靠性建模与分析的研究. 1993，6：401—408

[3] Wei Li, Jinhua Cao. Some Performance Measures of CIMS Transfer Line with General Distribution. Proceedings of the First Symposium on System Reliability and Probabilistic Risk, 1993, 1—7

[4] 李泉林，仇丽. 一般 pH 型可靠性模型的 S 结构算法和动态理论. 中国第一届运筹学会青年可靠性学术会议论文集，北京：机械工业出版社，1994，124—129

[5] Neuts, M. F., Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications. Marce Dekker, INC, New York and Basel, 1989

[6] Neust, M. F.. Matric-Geometric Solutions Stochastic Model-An Algorithm Approach. the Johns Hopkings University Press, 1981

The Phase Type Analysis of Reliability on CIMS with Multiple Levels Changing Environment

LI Quanlin
(Department of Mathematics, Yanshan University · Hebei Qinhuangdao, 066004, PRC)

Abstract: This paper considers the reliability problem of CIMS with a finite buffer and multiple levels changing environment. The life times of two working stations are assumed to take exponential distributions, all other random factors are the Markov-modulated poisson processes. By means of quasi birth and death processes theory, we obtain all reliability indexes and procuction indexes of system, give some random perturbations boundaries of system when there is a small changing of the environment, and consider some asymptotic properties of system.

Key words: the working station; the changing environment; the Markov-modulated poisson process; the phase type distribution

本文作者简介

李泉林　1964 年生. 1991 年毕业于东北重型机械学院获硕士学位. 现为该校副教授. 主要研究方向为可靠性理论，随机服务系统，离散事件动态系统和神经元网络等等.