第 12 卷第 1 期
1995 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 1
Feb. , 1995

线性时变离散系统的状态观测器

刘轩黄　　　　　　　　刘丹阳
（江西电力职工大学·南昌，330032）（北京理工大学电子工程系·北京，100081）

摘要：本文放弃了 Luenberger 状态观测器理论对系统完全可观测性的要求，提出了一般线性时变离散系统的状态观测器设计方法，并对 $j=i,i-1$ 给出了系统完全 (i,j,T_i)- 可重构这一新概念的充要条件.

关键词：观测器；状态估计；可重构性；离散系统；时变系统

1 引　言

R. E. Kalman 于 60 年代提出的著名滤波算法[1] 为随机线性离散时变系统的状态估计问题提供了一个有力的工具. 但 Kalman 滤波理论要求事先知道系统初始状态的均值与方差，这一要求在实际应用中是很难满足的. Liu and Liu[2] 放弃了 Kalman 滤波理论的这一要求，在未知系统初始状态的均值和方差的情况下，给出了求随机线性时变离散系统最优状态估计的递推算法.

对于确定性系统，Luenberger 的开创性工作[3~5] 为现代状态观测器理论奠定了基础. Ogata[6] 和 Mahmoud and Singh[7] 对现有的各种观测器设计方法作了全面而深入的介绍. 但是所有这些观测器设计方法均要求系统是完全可观测的，并且只能应用于定常系统. 本文将进一步推广文献[2] 的工作，提出更为一般的线性时变离散系统的观测器设计方法. 该方法放弃了 Luenberger 观测器理论对系统完全可测的要求以及只能应用于定常系统的限制，并能在最短的时间内给出可重构系统状态的准确估计. 本文还将给出系统完全可重构的充要条件及可重构性指标的在线计算方法.

广义逆矩阵理论是本文主要使用的数学工具，本文所使用的有关广义逆的记号与文献[8] 相同. 有关广义逆的一般理论及其在估计中的应用可参考[8,9].

2 基本引理

考虑如下系统的估计问题：

$$Y_k = H_k X, \quad k = 0,1,\cdots. \tag{1}$$

其中 $Y_k \in \mathrm{R}^{m\times p}$ 为观测值，$H_k \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 为已知矩阵，$X \in \mathrm{R}^{n\times p}$ 为待估计矩阵. 令 $\hat{X}_k$ 为给定 $Y_0, \cdots, Y_k$ 时 X 的某一线性估计，即

$$\hat{X}_k = L_k \overline{Y}_k. \tag{2}$$

其中 $L_k \in \mathrm{R}^{n\times(k+1)m}$ 为某一待定矩阵，$\overline{Y}_k = \overline{H}_k X$，而

本文于 1993 年 11 月 20 日收到. 1994 年 5 月 24 日收到修改稿.

$$\overline{Y}_k = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}, \quad \overline{H}_k = \begin{bmatrix} H_0 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix}. \tag{3}$$

由于 $\hat{X}_k = L_k\overline{H}_kX$，所以估计的偏差为

$$X - \hat{X}_k = Q_kX. \tag{4}$$

其中

$$Q_k = I - L_k\overline{H}_k. \tag{5}$$

并称之为 $\hat{X}_k$ 的偏差矩阵. 显然，为使对任何 X，估计的偏差(4)最小，一种办法是选择 L_k 使得偏差矩阵 Q_k 的 Frobenius 范数 $\|Q_k\|$ 最小. 下面的引理 1 完满地给出了此问题的答案，它是本文的主要理论依据.

引理 1 L_k 的选择使 $\|Q_k\| = \|I - L_k\overline{H}_k\|$ 最小，当且仅当

$$L_k = \overline{H}_k^{(1,4)}. \tag{6}$$

其中 $\overline{H}_k^{(1,4)}$ 为 $\overline{H}_k$ 的任一{1,4}-逆.

证 这是广义逆理论中的一个基本结论，见文献[8]第三章例 26 和文献[9].

根据 Rao[9]和 Chipman[10]的说法，当 L_k 按(6)式给出，则由(2)得到的 $\hat{X}_k$ 称为 X 的线性最小偏差估计(LIMBE). 为了得到 $\hat{X}_k$ 的递推公式，我们先给出 $\overline{H}_k^{(1,4)}$ 的递推公式. 由(3)可令

$$\overline{H}_k = \begin{bmatrix} \overline{H}_{k-1} \\ H_k \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$Q_{k-1} = I - \overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1}, \tag{8}$$

$$A_k = H_kQ_{k-1}. \tag{9}$$

其中 $k=0,1,\cdots,\overline{H}_{-1}$应理解为不存在，$Q_{-1}=I$. 以下我们证明

$$L_k = [(I - A_k^{(1,4)}H_k)\overline{H}_{k-1}^{(1,4)} \quad A_k^{(1,4)}] \tag{10}$$

为 $\overline{H}_k$ 的一个{1,4}-逆. 因为 $A_k^{(1,4)} = A_k^{\mathrm{T}}(A_kA_k^{\mathrm{T}})^{(1)} = Q_{k-1}Q_{k-1}H_k^{\mathrm{T}}(A_kA_k^{\mathrm{T}})^{(1)} = Q_{k-1}A_k^{(1,4)}$，所以

$$H_kA_k^{(1,4)} = H_kQ_{k-1}A_k^{(1,4)} = A_kA_k^{(1,4)}, \tag{11}$$

$$\overline{H}_{k-1}A_k^{(1,4)} = \overline{H}_{k-1}Q_{k-1}A_k^{(1,4)} = 0. \tag{12}$$

于是由(10)及(7)，

$$\begin{aligned} L_k\overline{H}_k &= (I - A_k^{(1,4)}H_k)\overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1} + A_k^{(1,4)}H_k \\ &= \overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1} + A_k^{(1,4)}H_kQ_{k-1} \quad \text{由(8)} \\ &= \overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1} + A_k^{(1,4)}A_k \quad \text{由(7)} \end{aligned} \tag{13}$$

为对称矩阵，并且 $\overline{H}_k(L_k\overline{H}_k) = \overline{H}_k$，这是因为由(13)可知

$$\begin{aligned} \overline{H}_{k-1}(L_k\overline{H}_k) &= \overline{H}_{k-1}(\overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1} + A_k^{(1,4)}A_k) \\ &= \overline{H}_{k-1}, \quad \text{由(12)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_k(L_k\overline{H}_k) &= H_k(\overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\overline{H}_{k-1} + A_k^{(1,4)}A_k) \\ &= H_k(I - Q_{k-1}) + A_kA_k^{(1,4)}A_k \quad \text{由(8) 及(11)} \\ &= H_k, \quad \text{由(9)} \end{aligned}$$

这样便证明了由(10)式给出的 L_k 为 $\overline{H}_k$ 的一个{1,4}-逆. 另外，由(13)还可知

$$Q_k = I - L_k\overline{H}_k = Q_{k-1} - A_k^{(1,4)}A_k.$$

总结以上讨论,我们有以下引理.

引理 2 $\overline{H}_k^{(1,4)}=[(I-G_kH_k)\overline{H}_{k-1}^{(1,4)}\quad G_k]$,其中 $k=0,1,\cdots,\overline{H}_{-1}$应理解为不存在,$G_k$ 满足以下递推式:

$$A_k = H_kQ_{k-1},\quad 其中\ Q_{-1}=I,$$
$$G_k = A_k^{(1,4)},$$
$$Q_k = Q_{k-1} - G_kA_k.$$

由(2),(3),(6)和引理 2,可很容易地获得下述重要引理.

引理 3 对 $k=0,1,\cdots$,系统(1)中 X 的 LIMBE 可如下递推地得到:

$$A_k = H_kQ_{k-1},\quad 其中\ Q_{-1}=I,$$
$$G_k = A_k^{(1,4)},$$
$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + G_k(Y_k - H_k\hat{X}_{k-1}),\quad 其中\ \hat{X}_{-1}=0,$$
$$Q_k = Q_{k-1} - G_kA_k.$$

3 主要结果

在这一节里我们应用上一节的引理来研究线性时变系统

$$X_{k+1} = F_kX_k + E_kU_k, \tag{14a}$$
$$Y_k = H_kX_k,\quad k=0,1,\cdots \tag{14b}$$

的状态估计问题,其中 $X_k\in R^{n\times p}$为待估计状态,$U_k\in R^{r\times p}$为已知输入,$Y_k\in R^{m\times p}$为输出,E_k,F_k 和 H_k 为适当维的已知矩阵,初始状态 X_0 未知.

令 $\hat{X}_{i,j}$表示给定 $Y_0,\cdots,Y_j$ 时 X_i 的 LIMBE,$Q_{i,j}$表示 $\hat{X}_{i,j}$的偏差矩阵,满足

$$X_i - \hat{X}_{i,j} = Q_{i,j}X_0. \tag{15}$$

设已获得 $\hat{X}_{k,k-1}$及 $Q_{k,k-1}$则把引理 3 应用于(14b)后可知

$$\hat{X}_{k,k} = \hat{X}_{k,k-1} + G_k(Y_k - H_k\hat{X}_{k,k-1}),$$
$$Q_{k,k} = Q_{k,k-1} - G_kA_k.$$

其中 $A_k=H_kQ_{k,k-1},G_k=A_k^{(1,4)},\hat{X}_{0,-1}=0,Q_{0,-1}=I$. 另外,由(14a)很明显有

$$\hat{X}_{k+1,k} = F_k\hat{X}_{k,k} + E_kU_k,$$
$$Q_{k+1,k} = F_kQ_{k,k},$$

于是便证明了以下两个定理.

定理 1 令 $\hat{X}_{0,-1}=0,Q_{0,-1}=I$,对 $k=0,1,\cdots$,令

$$A_k = H_kQ_{k,k-1},\quad G_k = A_k^{(1,4)},$$

则系统(14)状态的 LIMBE 可如下递推地获得:

$$\hat{X}_{k,k} = \hat{X}_{k,k-1} + G_k(Y_k - H_k\hat{X}_{k,k-1}),$$
$$Q_{k,k} = Q_{k,k-1} - G_kA_k,$$
$$\hat{X}_{k+1,k} = F_k\hat{X}_{k,k} + E_kU_k,$$
$$Q_{k+1,k} = F_kQ_{k,k}.$$

定理 2 把定理 1 应用于系统(14),则

$$X_k - \hat{X}_{k,k-1} = Q_{k,k-1}X_0,\quad X_k - \hat{X}_{k,k} = Q_{k,k}X_0.$$

定理1为时变系统(14)提供了一个状态观测器,这是本文的主要结果,它不要求系统(14)是完全可观测的和定常的. 当 $p=1$,定理1便退化为文献[2]的结果. 稍后,我们将以定理2为基础,指出有关此观测器的无误差估计性质. 下面我们先给出系统(14)的完全可重构性概念.

定义1 设 $i,j\geqslant 0$ 为两个整数,T_i 为一 n 列已知矩阵,系统(14)称为是完全 (i,j,T_i)-可重构的,如果对任何 $X_0\in R^{n\times p}$,根据 $Y_0,\cdots,Y_j$ 可得到 T_iX_i 的无误差估计. 特别,如果系统(14)为完全 $(i,i-1,I)$-可重构的,则简称系统(14)是完全可重构的.

显然,系统(14)的完全可观测性是以上定义的一种特殊情形,即完全 $(0,j,I)$-可重构性. 如果系统(14)是完全可观测的,则对任何整数 $i\geqslant 0$,系统(14)必然也是 (i,j,I)-可重构的. 但反之未必.

定义2 如果 i 是使系统(14)完全 $(i,i-1,I)$-可重构的最小整数,则称 i 为系统(14)的可重构性指标.

关于系统(14)的可重构性,根据定理2,我们有以下结论,其中结论(3)给出了完全可重构的充要条件.

推论1 把定理1应用于系统(14),则

1) $X_k-\hat{X}_{k,k-1}=0 \Leftrightarrow Q_{k,k-1}X_0=0 \Leftrightarrow k\geqslant \min\{i:Q_{i,i-1}X_0=0,i\geqslant 0\}$;

2) $X_k-\hat{X}_{k,k}=0 \Leftrightarrow Q_{k,k}X_0=0 \Leftrightarrow k\geqslant \min\{i:Q_{i,i}X_0=0,i\geqslant 0\}$;

3) $X_k-\hat{X}_{k,k-1}=0,\ \forall\ X_0 \Leftrightarrow Q_{k,k-1}=0 \Leftrightarrow k\geqslant \min\{i:Q_{i,i-1}=0,\ i\geqslant 1\}$;

4) $X_k-\hat{X}_{k,k}=0,\ \forall\ X_0 \Leftrightarrow Q_{k,k}=0 \Leftrightarrow k\geqslant \min\{i:Q_{i,i}=0,\ i\geqslant 0\}$.

关于可重构性指标,根据定义2和以上推论,我们有

推论2 系统(14)的可重构性指标为

$$\min\{i:Q_{i,i-1}=0,\ i\geqslant 1\}.$$

关于 (i,j,T_i)-可重构性,我们有以下结果,其中的结论(3)给出了系统(14)完全 (i,j,T_i)-可重构的充要条件.

推论3 设 $i\geqslant 0$ 为整数,T_i 为一 n 列矩阵,$Z_i=T_iX_i$. 把定理1应用于系统(14),则对于 $j=i,i-1$ 及 $\hat{Z}_{i,j}=T_i\hat{X}_{i,j}$,有

1) $Z_i-\hat{Z}_{i,j}=T_iQ_{i,j}X_0$;

2) $Z_i-\hat{Z}_{i,j}=0 \Leftrightarrow T_iQ_{i,j}X_0=0$;

3) $Z_i-\hat{Z}_{i,j}=0,\ \forall\ X_0 \Leftrightarrow T_iQ_{i,j}=0$.

4 结论

本文放弃了 Luenberger 状态观测器理论对系统完全可观测性的要求以及只能应用于定常系统的限制,提出了一般线性时变系统(14)的状态观测器设计方法(定理1),给出了系统(14)完全 (i,j,T_i)-可重构的概念(定义1),并对 $j=i,i-1$,建立了完全 (i,j,T_i)-可重构的充要条件(推论1及推论3)及可重构性指标的在线计算方法(推论2).

参考文献

[1] Kalman, R. E.. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. J. Basic Eng., Trans. ASME Ser. D.

1960, 82:35—45

[2] Liu, X. and Liu, D.. Optimal State Estimation without the Requirement of A Priori Statistics Information of the Initial State. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(10):

[3] Luenberger, D. G.. Observing the State of a Linear System. IEEE Trans. Military Electr., 1964, 8:74—80

[4] Luenberger, D. G.. Observers for Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, 11:190—197

[5] Luenberger, D. G.. An Introduction to Observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, 16:596—602

[6] Ogata, K.. Discrete-Time Control Systems. Prentice-Hall, 1987

[7] Mahmoud, M. S. and Singh, M. G.. Discrete Systems. Springer, 1984

[8] Ben-Israel, A. and Greville, T. N. E.. Generalized Inverses. John Wiley & Sons, 1974

[9] Rao, C. R.. Linear Statistical Inference and Its Applications. John Wiley & Sons, 1973, 43—46

[10] Chipman, J. S.. On Least Squares with Insufficient Observations. J. Amer. Statist. Assoc., 1964, 59:1078—1111

State Observer of Discrete Linear Time-Varying Systems

LIU Xuanhuang

(Jiangxi Electrical University for Staff • Nanchang, 330032, PRC)

LIU Danyang

(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology • Beijing, 100081, PRC)

Abstract: A state observer design procedure is presented for discrete linear time-varying systems, without such requirement as complete observability in the well known Luenberger's observer theory. The necessary and sufficient condition for the new concept of complete (i,j,T_i)-reconstructibility, where $j=i,i-1$, is given.

Key words: observer; state estimation; recontructibility; discrete systems; time-varying systems

本文作者简介

刘轩黄 1935 年生. 江西电力职工大学教授. 目前的主要研究兴趣为矩阵理论(特别是广义逆理论)及其在最优控制和最优估计问题中的应用,有译著《广义逆的理论与应用》.

刘丹阳 1962 年生. 北京理工大学电子工程系博士生. 主要研究领域为系统辨识与参数估计,自适应控制,计算机实时控制,状态估计,最优控制.