

具有结构式和非结构式不确定性的 反馈系统的鲁棒稳定性*

田玉平 冯纯伯

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 本文讨论了同时含有具范数约束的非结构式摄动和线性相关系数摄动的闭环系统的鲁棒稳定性, 首先给出了一种顶点-棱边型判据, 然后引入了顶点相位差的概念, 使得这类系统的鲁棒稳定性可以用顶点相位差来精确判断, 最后介绍了求取顶点相位差的一种简单算法。

关键词: 鲁棒稳定性; 不确定反馈系统; 非结构式摄动; 线性相关系数摄动

1 引言

不确定系统的鲁棒性分析已成为控制理论中的一个重要课题。系统的不确定性模型是多种多样的, 目前文献中一般将它们分为结构式和非结构式两种。非结构式不确定性一般用有界范数摄动来描述, 分析具有这类不确定性系统的鲁棒稳定性的基本工具是小增益定理^[1]。对于稳定的传递函数和稳定的摄动, 小增益定理提供了系统鲁棒稳定的充要条件^[2]。结构式摄动又分为结构式复摄动(复频率 $j\omega$ 的函数)和实摄动(参数摄动)。为分析具有结构式复摄动的系统的鲁棒性, Doyle 提出了结构奇异值(μ)的概念^[3], 从理论上给出了具有结构式不确定性系统鲁棒稳定的充要条件。然而, 在复摄动块数大于或等于 3 以及具有实摄动的情况下, μ 的精确计算问题至今没有解决, 一般只能求得它的一个上界^[4]。

在具有参数摄动的 SESO 系统的鲁棒性分析中, Kharitonov 型结果是又一类具有吸引力的工作。Kharitonov 定理^[5]和棱边定理^[6]分别给出了判别区间多项式族和凸多面体多项式族的鲁棒稳定性的顶点判据和棱连判据。这方面工作的一个基本思想是寻找多项式族的一个子集, 使得族中所有多项式的稳定性可由该子集中的多项式的稳定性来保证。受这一思想的启发, Chapellat 等人分析了同时具有非线性结构式摄动和区间参数摄动的系统的鲁棒稳定性, 得到了类似 Kharitonov 定理的顶点检验结果^[7]。

熟知, 比区间模型更为复杂和一般化的是凸多面体模型, 即传递函数的分子、分母分别属于各自的多项式凸多面体, 此时系数的摄动参数以线性方式进入分子、分母多项式的第 n 项^[8]。我们在本文中分析同时具有非结构式摄动和线性相关系数摄动的闭环系统的鲁棒稳定性, 首先给出了一个顶点-棱边型判据, 然后引入了“顶点相位差”的概念及计算顶点相位差的算法。利用顶点相位差我们不仅能精确判断闭环系统的鲁棒稳定性, 而且还可用它来反映系统的鲁棒稳定裕度。

* 国家自然科学基金资助课题。

本文于 1993 年 3 月 31 日收到, 1994 年 5 月 19 日收到修改稿。

2期

2 不确定闭环系统的鲁棒稳定性

我们考虑如图 1 所示的闭环系统的稳定性. 这里我们将未建模动态部分 ΔP 通过框图变换隔离出来置入反馈通道. $\Delta P \in RH_\infty$ 且具范数约束, 不失一般性, 设 $\|\Delta P\|_\infty \leq 1$. $G(s) \in \mathcal{G}(s) \subset RH_\infty$, 是系统具有参数摄动的部分, 其中 $\mathcal{G}(s)$ 是一稳定的实有理函数族. 这是当前在文献中讨论相当广泛并有其实际意义的一类不确定系统^[2,7,9]. 下面的引理给出了该系统鲁棒稳定的充要条件.

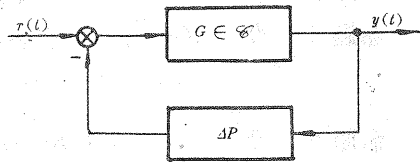


图 1 不确定反馈系统

引理 1^[2] 设 $\mathcal{G}(s)$ 为一稳定的传递函数族, 则对于所有的 $G(s) \in \mathcal{G}(s)$ 和所有满足 $\Delta P \in RH_\infty$ 且 $\|\Delta P\|_\infty \leq 1$ 的 ΔP , 图 1 所示系统保持稳定的充要条件是

$$\max_{G \in \mathcal{G}} \|G\|_\infty < 1. \quad (1)$$

对于一般的 $\mathcal{G}(s)$, $\max_{G \in \mathcal{G}} \|G\|_\infty$ 的计算是很困难的. 本文考虑的是具有线性相关系数摄动的情况. 设 $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, 此时 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别属于多项式凸多面体 $\mathcal{N}_r(s)$ 和 $\mathcal{D}_r(s)$, 即

$$\mathcal{N}_r(s) = \{N(s); N(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i, n \in \Omega_n\},$$

$$\mathcal{D}_r(s) = \{D(s); D(s) = \sum_{i=0}^q d_i s^i, d \in \Omega_d\},$$

其中 Ω_n 和 Ω_d 分别是 R^{m+1} 和 R^{q+1} 中的凸多面体. 记 Ω_n 和 Ω_d 的顶点集合分别为 Ω_n^v 和 Ω_d^v , 而它们的棱边(一维突出边^[6])集合分别为 Ω_n^e 和 Ω_d^e . 则相应的 $\mathcal{N}_r(s)$ 和 $\mathcal{D}_r(s)$ 的顶点集合分别为

$$V_n(s) = \{N_v(s); N_v(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i, n \in \Omega_n^v\},$$

$$V_d(s) = \{D_v(s); D_v(s) = \sum_{i=0}^q d_i s^i, d \in \Omega_d^v\}.$$

$\mathcal{N}_r(s)$ 和 $\mathcal{D}_r(s)$ 的棱边集合分别为

$$E_n(s) = \{N_e(s); N_e(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i, n \in \Omega_n^e\},$$

$$E_d(s) = \{D_e(s); D_e(s) = \sum_{i=0}^q d_i s^i, d \in \Omega_d^e\}.$$

定义多项式族 $\mathcal{N}_r(s)$ 和 $\mathcal{D}_r(s)$ 在频率点 ω 处的值集分别为

$$\mathcal{N}'_r(\omega) := \{N(j\omega); \forall N(s) \in \mathcal{N}_r(s)\}, \quad \mathcal{D}'_r(\omega) := \{D(j\omega); \forall D(s) \in \mathcal{D}_r(s)\}.$$

根据文[8]我们知道, $\mathcal{N}'_r(\omega)$ 和 $\mathcal{D}'_r(\omega)$ 是复平面中两个凸多边形. 记 $\mathcal{N}'_r(\omega)$ 的顶点集合和边集合分别为 $V'_n(\omega)$ 和 $E'_n(\omega)$; $\mathcal{D}'_r(\omega)$ 的顶点集合分别为 $V'_d(\omega)$ 和 $E'_d(\omega)$. 则下面的关系成立^[8]:

$$V'_n(\omega) \subseteq V_n(\omega) := \{N_v(j\omega); \forall N_v(s) \in V_n(s)\},$$

$$E'_n(\omega) \subseteq E_n(\omega) := \{N_e(j\omega); \forall N_e(s) \in E_n(s)\},$$

$$V'_d(\omega) \subseteq V_d(\omega) := \{D_v(j\omega); \forall D_v(s) \in V_d(s)\},$$

$$E_d(\omega) \subseteq E_d(\omega) := \{D_e(j\omega) : \forall D_e(s) \in E_d(s)\},$$

根据以上叙述,下面的命题是显然的.

命题 1 设 $\mathcal{N}_p(s)$ 为一 m 次多项多凸多面体,则

$$\max_{N(s) \in \mathcal{N}_p(s)} |N(j\omega)| = \max_{N_p(s) \in V_p(s)} |N_p(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

命题 2 设 $\mathcal{D}_p(s)$ 为 q 次 Hurwitz 多项多凸多面体,则

$$\min_{D(s) \in \mathcal{D}_p(s)} |D(j\omega)| = \min_{D_p(s) \in E_d(s)} |D_p(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

于是我们可以得到下面的定理.

定理 1 设 $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \in \mathcal{G}(s)$, $\mathcal{G}(s)$ 是一正则稳定的有理函数族, $N(s) \in \mathcal{N}_p(s)$, $D(s) \in \mathcal{D}_p(s)$, 则对所有 $G(s) \in \mathcal{G}(s)$ 和所有满足 $\Delta P \in RH_\infty$ 且 $\|\Delta P\|_\infty \leq 1$ 的 ΔP , 图 1 所示闭环系统保持稳定的充要条件是

$$\left\| \frac{N_p(s)}{D_e(s)} \right\|_\infty < 1, \quad \begin{aligned} &\forall N_p(s) \in V_n(s), \\ &\forall D_e(s) \in E_d(s). \end{aligned} \quad (4)$$

证 根据引理 1 我们知道系统鲁棒稳定的充要条件是

$$\max_{G(s) \in \mathcal{G}(s)} \|G(s)\|_\infty < 1.$$

而根据 H_∞ 范数的定义及命题 1 和命题 2 我们不难推出

$$\max_{G(s) \in \mathcal{G}(s)} \|G(s)\|_\infty = \max_{\substack{N_p(s) \in V_n(s) \\ D_p(s) \in E_d(s)}} \left\| \frac{N_p(s)}{D_e(s)} \right\|_\infty. \quad \text{证毕.}$$

注 1 命题 1 可以推广到多项式矩阵凸多面体的情形. 设 $\mathcal{N}_p^M(s)$ 为一 h_l 维多项式矩阵凸多面体,即

$$\mathcal{N}_p^M(s) = \text{conv}(V_n^M(s)), \quad (5)$$

其中 $V_n^M(s) = \{N_1^M(s), \dots, N_{n_l}^M(s)\}$, $\text{conv}(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的凸包. 于是有下面的等式^[9]:

$$\max_{N^M(s) \in \mathcal{N}_p^M(s)} \bar{\sigma}(N^M(j\omega)) = \max_{N_{n_l}^M(s) \in V_n^M(s)} \bar{\sigma}(N_{n_l}^M(j\omega)), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的最大奇异值.

于是定理 1 可以推广到下面所述的一类多变量系统中

推论 1 设有正则稳定的 l -输入 h -输出的多变量系统族:

$$\mathcal{G}^M(s) = \{G^M(s) : G^M(s) = \frac{N^M(s)}{D(s)}, N^M(s) \in \mathcal{N}_p^M(s), D(s) \in \mathcal{D}_p(s)\}. \quad (7)$$

则对于所有 $G^M(s) \in \mathcal{G}^M(s)$ 和所有满足 $\Delta P \in RH_\infty$ 且 $\|\Delta P\|_\infty \leq 1$ 的 ΔP , 图 1 所示闭环系统鲁棒稳定的充要条件是

$$\max_{N^M(s) \in V_n^M(s)} \bar{\sigma}(N^M(j\omega)) / \min_{D(s) \in E_d(s)} |D(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

这一结果优于我们新近看到的文[9]中的定理 1, 因为在文[9]中必须对所有的 $D(s) \in \mathcal{D}_p(s)$ 求 $\min |D(j\omega)|$, 而本文指出只须考虑 $\mathcal{D}_p(s)$ 的棱边就足够了.

3 检验系统鲁棒稳定性的顶点相位差法

在上节中我们给出了检验系统鲁棒稳定性的顶点-棱边型判据. 然而, 直接利用这一

2 期

结果判断系统的鲁棒稳定性, 计算量是相当大的, 这是因为:

- 1) 必须检验多项式族 $\mathcal{D}_r(s)$ 的鲁棒稳定性. 根据棱边定理, 这意味着必须且只须检验 $\mathcal{D}_r(s)$ 的所有棱边多项式的稳定性;
- 2) 在每一频率点解优化问题: $\min_{D_e(s) \in E_d(s)} |D_e(j\omega)|$;
- 3) 在每一频率点计算 $\max_{N_v(s) \in V_n(s)} |D_r(j\omega)|$.

当不确定参数的个数增加时, $\mathcal{D}_r(s)$ 的棱边数将急剧增加, 因此 1) 和 2) 常会带来所谓的“结合爆炸”问题. 为解决上述问题, 我们在本节中介绍一种实用的“顶点相位差”法. 记 $\text{sect}(\theta)$ 为复平面中顶点在原点、扇角为 θ 的扇形. 系统的顶点相位差 θ_m 定义为:

$$\theta_m \triangleq \max_{\omega \in \mathbb{R}} \theta(\omega) \\ \triangleq \max_{\omega \in \mathbb{R}} \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \{ \theta; D_r(j\omega) + |N_v(j\omega)| e^{j\varphi} \in \text{sect}(\theta), \forall D_e(s) \in V_d(s), \\ \forall N_v(s) \in V_n(s), \forall \varphi \in [0, 2\pi] \}. \quad (9)$$

定理 2 设 $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \in \mathcal{G}$, $N(s) \in \mathcal{N}_r(s)$, $D(s) \in \mathcal{D}_r(s)$, 则对于所有的 $G(s) \in \mathcal{G}(s)$ 和所有满足 $\Delta P \in \text{RH}_\infty$ 且 $\|\Delta P\|_\infty \leq 1$ 的 ΔP , 图 1 所示闭环系统保持稳定的充要条件是

$$\theta_m < \pi. \quad (10)$$

定理 2 的证明见附录.

注 2 对于(7)式所描述的多变量系统族, 定理 2 仍是成立的, 只要在(9)中将 $|N_v(j\omega)|$ 换成 $\bar{\sigma}(N_v^*(j\omega))$ 就可以了. 同样, 在后面介绍的算法中也是如此, 不再说明.

注 3 θ_m 可以看成反映系统鲁棒稳定裕度的某种测定. θ_m 越接近 π , 系统的鲁棒稳定裕度就越小.

下面我们来看 $\theta(\omega)$ 在复平面中的几何解释和求取 θ_m 的方法.

显然, 集合 $\{D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)| e^{j\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 对应于复平面中以 $(\text{Re}(D_e(j\omega)), \text{Im}(D_e(j\omega)))$ 为圆心, 以 $|N_v(j\omega)|$ 为半径的圆. 记 $|N_{vm}(j\omega)| = \max_{N_v(s) \in V_n(s)} |N_v(j\omega)|$. 如果我们分别以凸多边形 $\mathcal{D}_r(j\omega)$ 的各个顶点作圆心画半径为 $|N_{vm}(j\omega)|$ 的圆, 如图 2 所示, 则根据 $\theta(\omega)$ 的定义知, $\text{sect}(\theta(\omega))$ 是包含所有这些圆周的最小扇域.

记包含单个圆周 $\{D_{vi}(j\omega) + |N_{vm}(j\omega)| e^{j\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 的最小扇形为 $\text{sect}(\theta_i^-, \theta_i^+)$, 由图 2 看出, θ_i^- 和 θ_i^+ 可由下式求出:

$$\begin{cases} \theta_i^-(\omega) = \arg(D_{vi}(j\omega)) - \arcsin \frac{|N_{vm}(j\omega)|}{|D_{vi}(j\omega)|}, \\ \theta_i^+(\omega) = \arg(D_{vi}(j\omega)) + \arcsin \frac{|N_{vm}(j\omega)|}{|D_{vi}(j\omega)|}. \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\arg(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的相角, $0 \leq \arg(\cdot) \leq 2\pi$.

(11) 式中 $D_{vi}(j\omega) \neq 0$ 对所有 $\omega \in \mathbb{R}$ 均成立, 否则 $D_{vi}(s)$ 将不是 Hurwitz 稳定的. 所以 $\arg(D_{vi}(j\omega))$ 总是有意义的. 为使 $\arcsin \frac{|N_{vm}(j\omega)|}{|D_{vi}(j\omega)|}$ 有意义, 须有 $\frac{|N_{vm}(j\omega)|}{|D_{vi}(j\omega)|} \leq 1$. 而事实上, 如果 $\frac{|N_{vm}(j\omega)|}{|D_{vi}(j\omega)|} \geq 1$, 而 $\left\| \frac{N_v(s)}{D_{vi}(s)} \right\|_\infty \geq 1$, 即系统不是鲁棒稳定性. 但须注意 $\left\| \frac{N_v(s)}{D_{vi}(s)} \right\|_\infty < 1$.

只是系统鲁棒稳定的必要条件,而非充要条件.

下面给出计算 θ_m 的算法.

1) 对于给定的 ω , 计算 $D_{vi}(j\omega)$, $|N_{vm}(j\omega)| = \max_{N_p(\omega) \in V_n(\omega)} |N_v(j\omega)|$. 然后, 根据 (11) 式计算 $\theta_i^-(\omega)$ 和 $\theta_i^+(\omega)$.

2) 判断 $\theta_i^-(\omega)$ 和 $\theta_i^+(\omega)$ 属于哪个象限. 如果 $\theta_i^-(\omega)$ 或 $\theta_i^+(\omega)$ 恰好落在坐标轴上, 则认为 $\theta_i^-(\omega)$ 或 $\theta_i^+(\omega)$ 属于那两个相邻的象限.

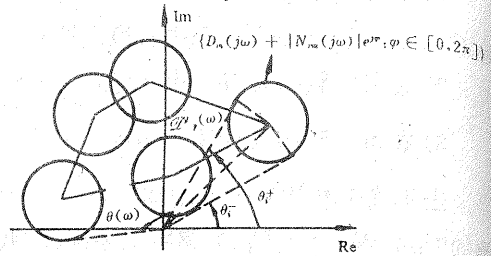


图2 $\theta(\omega)$ 的几何解释

3) 记属于第 l 象限中的所有相角中的最大者为 $\varphi_i^+(\omega)$, 最小者为 $\varphi_i^-(\omega)$, 根据以下三种情况判断 $\theta(\omega)$ 的大小:

情况 1 当所有 $\theta_i^-(\omega)$ 和 $\theta_i^+(\omega)$ 均落在某一个或某两个相邻象限中时, $\theta(\omega) < \pi$;

情况 2 当所有 $\theta_i^-(\omega)$ 和 $\theta_i^+(\omega)$ 落在四个象限中时, $\theta(\omega) \geq \pi$;

情况 3 当所有 $\theta_i^-(\omega)$ 和 $\theta_i^+(\omega)$ 落在三个或两个对顶象限中时, $\theta(\omega)$ 由下式确定:

$$\theta(\omega) = \min(\varphi_{i+2}^+ - \varphi_i^-, 2\pi - \varphi_{i+2}^- + \varphi_i^+). \quad (12)$$

其中当 1, 3 象限中有 $\theta_i^-(\omega)$ 或 $\theta_i^+(\omega)$ 时 $l = 1$, 当 2, 4 象限中有 $\theta_i^-(\omega)$ 或 $\theta_i^+(\omega)$ 时, $l = 2$;

4) 如果 $\theta(\omega) < \pi$, 改变 ω , 重复上述步骤, 直到 ω 足够大; 如果 $\theta(\omega) \geq \pi$, 则系统非鲁棒稳定, 算法终止.

注 4 本算法充分显示了引入顶点相位差 θ_m 所带来的便利. 我们不需解优化问题, 而只需在有限个顶点上进行相位检验. 另外, 按该算法不需要检验多项式凸多面体 $\mathcal{D}_p(s)$ 的顶点或棱边的稳定性, 这是因为: 如果 $\theta(\omega) < \pi$, 则有 $0 \notin \mathcal{D}_p(s)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$. 根据排零原理^[8], 这意味着 $\mathcal{D}_p(s)$ 一定是鲁棒稳定的.

4 结 语

本文考虑了同时具有非结构式摄动和凸多面体模式的参数摄动的反馈系统的鲁棒稳定性问题. 我们证明, 这类系统的鲁棒稳定性可用一个顶点-棱边型判据来判断. 为解决这一判据所带来的计算量过大的问题, 我们引入了顶点相位差的概念, 并给出了求取顶点相位差的一种简单算法. 根据映射定理^[10], 本文方法还可推广到多线性相关系数摄动的情况, 这方面的工作我们将另文讨论.

参 考 文 献

- [1] Francis, B. A. . A Course in H_∞ Control Theory. Springer, 1987
- [2] Vidyasagar, M. . Control System Synthesis; A Factorization Approach. MA, MIT. Press, Cambridge, 1985
- [3] Doyle, J. C. . Analysis of Feedback System with Structured Uncertainties. Proc. IEE., Part D, 1982, 129(6): 242-250
- [4] Fan, M. K. H., Tits, A. L. and Doyle, J. C. . Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics. IEEE Trans. Automat. Contr. 1991, AC-36(1): 25-38

[5] Kharitonov, V. L. . Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. Differentsial'nye Uravnenija, 1978, 14(11): 2086—2088

[6] Bartlett, A. C. , Holot, C. V. and Huang, L. . Loo Locations for an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges. Math. for Contr. Signals and Systems, 1988, 1(1): 61—71

[7] Chapellat H. , Dehleh, M. and Bhattacharyya, S. P. . Robust Stability Problem with Linear Dependent Coefficient Perturbations. IEEE. Trans. Automat. Contr. , 1990, AC-35(10):1100—1108

[8] Barmish, B. R. . A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problem with Linear Dependent Coefficient Perturbations. IEEE. Trans. Automat. Contr. , 1989, AC-34(2): 157—165

[9] Zhou, K. and Guoxiang Gu. Robust Stability of Multivariable Systems with Both Real Parametric and Norm Bounded Uncertainties. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1992, AC-37(10): 1533—1537

[10] Zadeh, L. A. et al. . Linear System Theory. New York, Mc Graw-Hill, 1963

附 录

证 先定义下面两个集合

$$A(\omega) \triangleq \{D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

$$B(\omega) \triangleq \{D_e(j\omega) + \beta|N_v(j\omega)|e^{j\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi], \beta \in [0, 1]\}.$$

由 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 生成的两个顶点在原点的锥(扇形)为

$$\text{sect}(A) = \{\lambda x; \lambda > 0, x \in A(\omega)\}, \quad \text{sect}(B) = \{\lambda x; \lambda > 0, x \in B(\omega)\}.$$

显然有
$$\text{sect}(A) = \text{sect}(B). \tag{A1}$$

下面给出定理 2 的证明.

充分性 设 $\theta(\omega) < \pi, \forall \omega \in R$. 我们分下面几步证明定理的充分性.

1) 先证明对于 $\forall D_e(s) \in E_i(s), \forall N_v(s) \in V_v(s)$ 和 $\forall \omega \in R$ 总有

$$D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi} \neq 0, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{A2}$$

为此,我们只要证明
$$D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi} \in \text{sect}(\theta(\omega)), \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \tag{A3}$$

就可以了,因为当 $\theta(\omega) < \pi$ 时, $0 \notin \text{sect}(\theta(\omega))$.

不妨设 $D_e(s)$ 所在棱边的两个顶点多项式为 $D_e^1(s)$ 和 $D_e^2(s), D_e^i(s) \in V_v(s), i = 1, 2$. 于是有

$$D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi} = \lambda D_e^1(j\omega) + (1 - \lambda)D_e^2(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi}$$

$$= \lambda(D_e^1(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi}) + (1 - \lambda)(D_e^2(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi}), \lambda \in [0, 1].$$

由 θ_m 的定义知 $D_e^i(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi} \in \text{sect}(\theta(\omega)), \forall \varphi \in [0, 2\pi], i = 1, 2$. 考虑到 $\text{sect}(\theta(\omega))$ 在 $\theta(\omega) < \pi$ 时所具有的凸性,我们知 $D_e(j\omega) + |N_v(j\omega)|e^{j\varphi} \in \text{sect}(\theta(\omega)), \forall \varphi \in [0, 2\pi]$. 故(A2) 成立.

2) 证明
$$\left\| \frac{N_v(s)}{D_e(s)} \right\|_{\infty} < 1, \quad \begin{matrix} \forall N_v(s) \in V_v(s), \\ \forall D_e(s) \in E_i(s). \end{matrix} \tag{A4}$$

我们用反证法,假设(A4) 不成立,于是存在 $\omega_0 \in R$,使得

$$|N_v(j\omega_0)|/|D_e(j\omega_0)| = \frac{1}{\beta}, \quad \beta \in (0, 1).$$

则必存在 $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ 使得
$$D_e(j\omega_0) + \beta|N_v(j\omega_0)|e^{j\varphi_0} = 0. \tag{A5}$$

根据 $B(\omega)$ 的定义和(A5) 知 $0 \in B(\omega)$. 从而

$$0 \in \text{sect}(B). \tag{A6}$$

而由 $A(\omega)$ 的定义和(A2) 知 $0 \notin A(\omega)$, 从而

$$0 \notin \text{sect}(A). \tag{A7}$$

由(A6) 和(A7) 得 $\text{sect}(A) \neq \text{sect}(B)$, 与(A1) 矛盾,故(A4) 成立. 由定理 1 知系统鲁棒稳定.

必要性 设系统是鲁棒稳定的. 因此

$$\left\| \frac{N_v(s)}{D(s)} \right\|_{\infty} < 1, \quad \forall N_v(s) \in V_n(s), \quad \forall D(s) \in \mathcal{D}_p(s). \quad (A)$$

设 $|N_{em}(j\omega)| = \max_{N_v(s) \in V_n(s)} |N_v(j\omega)|$. 定义集合

$$F(\omega) \triangleq \{D(j\omega) + \beta |N_{em}(j\omega)| e^{j\varphi} : \forall D(s) \in \mathcal{D}_p(s), \forall \beta \in [0, 1], \forall \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

由 $F(\omega)$ 生成的顶点在原点的锥(扇形)为

$$\text{sect}(F) \triangleq \{\lambda x : \lambda > 0, x \in F(\omega)\}.$$

下面我们用反证法证明

$$\arg(\text{sect}(F)) < \pi. \quad (A')$$

其中 $\arg(\text{sect}(F))$ 表示 $\text{sect}(F)$ 的扇角. 假设 $\arg(\text{sect}(F)) \geq \pi$. 注意到 $F(\omega)$ 为一凸集, 因为它是两个凸集 $\{D(j\omega) : \forall D(s) \in \mathcal{D}_p(s)\}$ 和 $\{\beta |N_{em}(j\omega)| e^{j\varphi} : \forall \beta \in [0, 1], \forall \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 的集合. 因此当且仅当 $0 \in F(\omega)$ 时, $\arg(\text{sect}(F)) \geq \pi$. 于是存在 $\omega_0 \in R, D_0(s) \in \mathcal{D}_p(s), \varphi_0 \in [0, 2\pi]$ 和 $\beta_0 \in [0, 1]$, 使得

$$D_0(j\omega_0) + \beta_0 |N_{em}(j\omega_0)| e^{j\varphi_0} = 0,$$

即

$$\left| \frac{N_{em}(j\omega_0)}{D_0(j\omega_0)} \right| = \frac{1}{\beta_0} \geq 1.$$

这与(A8)矛盾. 所以假设不成立. 于是证得 $\arg(\text{sect}(F)) < \pi$.

回顾 θ_m 的定义和 $\text{sect}(F)$ 的定义可知定理必要性得证. 证毕.

Robust Stability of Feedback Systems with Structured and Unstructured Uncertainties

TIAN Yuping and FENG Chubo

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: In this paper we discuss the problem of the robust stability of closed-loop systems with both norm-bounded unstructured and linearly dependent coefficient perturbations. At first a vertex-edge like criterion is given. Then we introduce the concept of the phase difference of extreme points. By this concept the robust stability of the system discussed can be exactly determined. Finally, a simple algorithm for calculating the phase difference of extreme points is presented.

Key words: robust stability; uncertain feedback system; unstructured perturbation; linearly dependent coefficient perturbation

本文作者简介

田玉平 1964年生. 1986年毕业于清华大学自动化系. 1991年在前苏联莫斯科动力学院自动控制专业获博士学位. 现为东南大学自动控制系副教授. 主要研究方向为: 最优控制、鲁棒控制及系统稳定性分析.

冯纯伯 见本刊1995年第1期第33页.