

基于奇异值分解的递推辨识方法*

张友民 李庆国 戴冠中 张洪才

(西北工业大学自动控制系·西安, 710072)

摘要: 本文提出一种基于奇异值分解(SVD)的递推最小二乘辨识新方法,该方法不仅有好的收敛性和数值稳定性,而且在系统的输入信号不满足持续激励的充分必要条件下,仍能得到系统参数的无偏估计,仿真计算结果证明了本文方法的有效性和优越性。

关键词: 奇异值分解; 递推最小二乘辨识; 无偏估计; 持续激励

1 引言

递推最小二乘辨识法(RLS)以其概念简单、易于实现等优点被广泛应用于参数估计和控制等领域,但算法中协方差阵 $P(t)$ 的计算对舍入误差较敏感,会导致 $P(t)$ 失去对称正定性,从而出现数值稳定性问题^[1,2]。此外,在输入信号不满足持续激励条件或不充分激励情况下,应用 RLS 进行辨识将无法获得参数的无偏估计,算法的稳定性和鲁棒性较差。为此,Ljung 利用 Bierman 的 U - D 分解滤波思想给出了基于 U - D 分解实现的递推最小二乘辨识算法^[1],解决了 RLS 的数值稳定性问题,但在不充分激励时,数值稳定性仍较差。

奇异值分解(SVD)是迄今数值代数计算中数值稳定性和精度最好的一种矩阵分解,且易于在并行计算机实现,因此,近年来基于 SVD 的滤波、辨识与控制问题的研究受到学者们的极大重视^[4,5]。文[4]针对自校正控制问题把 SVD 应用于非递推加权最小二乘辨识(WLS)中,但该算法是一种批处理算法,计算量较大,若采用递推算法,则可大大减少计算量。基于此,本文将 SVD 技术与 RLS 相结合,提出一种基于 SVD 的递推最小二乘辨识新方法,较好地解决了不满足充分激励条件下的系统辨识问题,而且算法的收敛速度、数值稳定性和辨识精度明显优于 RLS 和基于 U - D 分解的 RLS 法。

2 奇异值分解(SVD)^[3]

SVD 广泛应用于线性最小二乘问题、病态方程组求解及广义逆计算等场合,在数字信号处理和控制在工程领域的应用亦越来越受到人们的重视。其基本概念和性质简介如下:

若 A 为 $N \times M$ 阶实矩阵,即 $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$,且不失一般性,设 $N \leq M$,则矩阵 A 的奇异值分解可表示为

$$A = U A V^T, \quad A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式中,矩阵 $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_N)$, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_N \geq 0$ 称为矩阵 A 的奇异值; $U = [U_1$

* 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1994 年 2 月 14 日收到, 1994 年 8 月 5 日收到修改稿。

2期

$U_1, \dots, U_N \in \mathbb{R}^{N \times N}, V = [V_1, V_2, \dots, V_M] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 是列正交矩阵, 即满足 $U^T U = U U^T = I, V^T V = V V^T = I_M$, 且称矩阵 U, V 的列向量分别为左、右奇异向量.

在实际应用中, 若 $A^T A$ 正定, 且 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是对称正定阵, 则 A 的奇异值分解可简化为

$$A = U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T \quad \text{或} \quad A = U S U^T = U D^2 U^T. \quad (2)$$

其中左奇异向量等于右奇异向量. 因此, 在奇异值分解计算时仅需计算左奇异向量或右奇异向量, 从而可节省计算量.

3 持续激励条件及输入信号的选择^[2]

为了使系统是可辨识的, 对输入信号最基本的要求是在辨识时间内系统的所有模态必须被输入信号持续激励, 更高的要求是输入信号必须具有较好的“优良性”, 而在实际系统中, 这些条件往往难于完全满足. 对于(4)式所示 SISO 系统, 如果由输入数据组成的 $2n \times 2n$ 维矩阵 $\Phi^T \Phi$ 正定 (n 为系统阶次), 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Phi^T \Phi = C_n > 0. \quad (3)$$

则系统是可辨识的充分必要条件是输入信号满足 $2n$ 阶持续激励条件.

需要指出, 虽然有些信号并不是持续激励信号(如阶跃信号等), 但这并不一定意味着利用这样的信号作为输入时就不能获得合理的参数估计, 而仅仅意味着当输入信号不再持续激励系统时, 辨识算法就不再可能获得更多的有用信号, 参数估计不再可能得到改善. 所以在不满足持续激励条件下, 对算法的快速收敛性和数值稳定性就有更高要求, 即要求辨识算法能在输入信号失去其持续激励条件前, 获得满意的参数估值. 本文以下提出的 SVD 辨识算法即是基于以上考虑而提出的能满足上述要求的一种有效算法.

4 基于奇异值分解的递推辨识新方法

4.1 辨识模型

对于 SISO 线性系统, 可描述为如下差分方程模型

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + \zeta(t). \quad (4)$$

式中, $u(t), y(t)$ 分别为系统输入、输出量, $a_i, b_i (i \in [1, n])$ 是待辨识的系统参数, $\zeta(t)$ 为随机白噪声. 若定义输入、输出数据向量和参数向量分别为

$$\varphi(t) = [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-n) H u(t-1) H u(t-2) \dots u(t-n)]^T, \quad (5)$$

$$\theta = [a_1 H a_2 \dots a_n H b_1 H b_2 \dots b_n]^T. \quad (6)$$

则(4)式可改写为如下向量形式

$$y(t) = \theta^T \varphi(t) + \zeta(t). \quad (7)$$

4.2 递推最小二乘辨识方法(RLS)

由(7)式可得到如下具有指数遗忘的递推最小二乘辨识算法的一般表示形式

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)], \quad (8)$$

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)S^{-1}\varphi^T(t)P(t-1), \quad (9)$$

$$S(t) = \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t) + \lambda(t), \quad (10)$$

$$K(t) = P(t)\varphi(t)/\lambda(t). \quad (11)$$

其中, $\lambda(t)$ ($0 < \lambda(t) \leq 1$) 为遗忘因子. 注意到(9)式存在两个对称矩阵的相减运算, 由于计算机有限字长的限制, 计算中舍入误差和截断误差的累积、传递可能会使 $P(t)$ 失去对称正定性, 从而使递推算法的数值稳定性变差甚至辨识过程发散, 为此, 本文采用矩阵SVD来代替协方差阵 $P(t)$ 的更新, 从而可大大提高算法的数值稳定性和辨识精度.

4.3 协方差阵 $P(t)$ 更新的SVD法

将(10)式代入(9)式有

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)(\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t) + \lambda(t))^{-1}\varphi^T(t)P(t-1), \quad (12)$$

应用矩阵求逆引理

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}, \quad (13)$$

则(12)式可化为信息矩阵形式

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \varphi(t)\lambda^{-1}(t)\varphi^T(t). \quad (14)$$

将上式对称正定矩阵 $P(t)$, $P(t-1)$ 表示为(2)式所示的奇异值分解形式, 可得下式:

$$\begin{aligned} [U(t)D^2(t)U^T(t)]^{-1} &= [U(t-1)D^2(t-1)U^T(t-1)]^{-1} + \varphi(t)\lambda^{-1}(t)\varphi^T(t) \\ &= [U(t-1)D^2(t-1)U^T(t-1)]^{-1} + [U^T(t-1)]^{-1} \\ &\quad \cdot U^T(t-1)\varphi(t)\lambda^{-1}(t)\varphi^T(t)U(t-1)U^{-1}(t-1) \\ &= [U^T(t-1)]^{-1}[D^{-2}(t-1) \\ &\quad + U^T(t-1)\varphi(t)\lambda^{-1}(t)\varphi^T(t)U(t-1)]U^{-1}(t-1). \end{aligned} \quad (15)$$

令上式中:

$$L^2(t) = \lambda^{-1}(t), \quad (16)$$

构造如下 $(2n+1) \times 2n$ 阶矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} L(t)\varphi^T(t)U(t-1) \\ D^{-1}(t-1) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

对上述矩阵进行奇异值分解, 得

$$\Sigma = \begin{bmatrix} L(t)\varphi^T(t)U(t-1) \\ D^{-1}(t-1) \end{bmatrix} = \bar{U}(t-1) \begin{bmatrix} \bar{D}(t-1) \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{V}(t-1)]^T, \quad (18)$$

则

$$\begin{aligned} \Sigma^T \Sigma &= D^{-2}(t-1) + U^T(t-1)\varphi(t)L(t)L^T(t)\varphi^T(t)U(t-1) \\ &= \bar{V}(t-1)[\bar{D}(t-1)]^2[\bar{V}(t-1)]^T. \end{aligned} \quad (19)$$

将(19)代入(15)式, 并利用正交矩阵的性质, 则(15)式化为

$$\begin{aligned} [U^T(t)]^{-1}D^{-2}(t)U^{-1}(t) &= [U^T(t-1)]^{-1}\bar{V}(t-1)[\bar{D}(t-1)]^2[\bar{V}(t-1)]^T U^{-1}(t-1) \\ &= [(U(t-1)\bar{V}(t-1))^T]^{-1}[\bar{D}(t-1)]^2[U(t-1)\bar{V}(t-1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

比较上式两端, 可得

$$U(t) = U(t-1)\bar{V}(t-1), \quad (21)$$

2期

$$D(t) = [\bar{D}(t-1)]^{-1}. \quad (22)$$

通过以上推导,实现了协方差阵 $P(t)$ 奇异值分解形式的更新,即由 U 和 D 的更新计算代替了 $P(t)$ 的更新计算.

则增益阵 $K(t)$ 可表示为

$$K(t) = U(t)D^2(t)U^T(t)\varphi(t)/\lambda(t). \quad (23)$$

由(23)式可见,此处不需对 $K(t)$ 进行奇异值分解计算,而直接利用上述计算结果经简单计算得到.由于 $U(t)$ 和 $D(t)$ 的更新方程中只用到了右奇异向量,所以进行奇异值分解时只需计算右奇异向量,从而可减小计算量.

4.4 奇异值分解递推辨识算法实现步骤

基于上述推导,下面给出本文基于 SVD 的递推辨识算法步骤如下:

在 $t=0$ 时刻,初始化 $U(0) = I$ 和 $D(0) = \sqrt{P_0}$. 在 t 时刻,更新 $U(t)$ 和 $D(t)$, 计算步骤如下:

- 1) 按(17)式构造 $(2n+1) \times 2n$ 阶矩阵 Σ ;
- 2) 按(18)式对矩阵 Σ 进行奇异值分解,求出其奇异值和右奇异向量;
- 3) 按(21), (22)式更新 $U(t), D(t)$;
- 4) 按(23)式计算增益阵 $K(t)$;
- 5) 按(8)式进行参数更新.

5 仿真计算

本文将上述基于 SVD 的递推最小二乘辨识方法应用于如下系统参数辨识问题的仿真计算,并与 RLS 及基于 U-D 分解的 RLS 法(简记为 BUD)进行了比较.

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-1) + 0.5u(t-2) + \zeta(t). \quad (24)$$

其中 $u(t), y(t)$ 分别为系统的输入和输出变量, $\zeta(t)$ 为随机白噪声序列.

输入信号 $u(t)$ 分别采用满足任意阶持续激励的白噪声序列和仅能充分激励一阶系统的正弦信号 $u(t) = \sin(\omega t)$. 分别应用 SVD, BUD 及 RLS 算法对上述两类不同输入的系统辨识问题进行了大量计算,图 1 给出三种算法在输入 $\omega = 0.7$ 正弦信号, ζ 为零均值,方差为 0.1 白噪声序列时的参数辨识结果. 由图可明显看出,在不满足持续激励情况下,RLS 参数估计有偏,且收敛很慢, BUD 算法可收敛于真值,但波动大,收敛较慢,而 SVD 算法不仅收敛速度快,且跟踪曲线平稳,可得到参数的无偏估计,这正是 SVD 法的优点所在. 尽管由于奇异值分解需较大计算量,与 BUD, BLS 算法相比, SVD 算法计算量稍大些,但在一般系统辨识问题中,系统阶次较低,其计算量的增加不多,而且本文 SVD 算法易于并行实现,亦可称补计算量较大的不足.

本文还对不同激励程度(ω 取不同值)和不同噪声干扰(噪信比分别为 $n/s = 10\%$, 25%)情况,分别应用 SVD 和 RLS 算法进行了大量仿真计算,参数估计结果如表 1 所示. 可见, SVD 算法的参数估计值受 ω 变化及噪声干扰影响较小,而 RLS 算法则随 ω 的变化产生很大波动,并且与真值有较大的偏差,说明 SVD 算法不仅收敛性、数值稳定性好,而且辨识精度明显高于 RLS 算法,对不同输入信号及噪声干扰具有很强的鲁棒性,是一种非常有

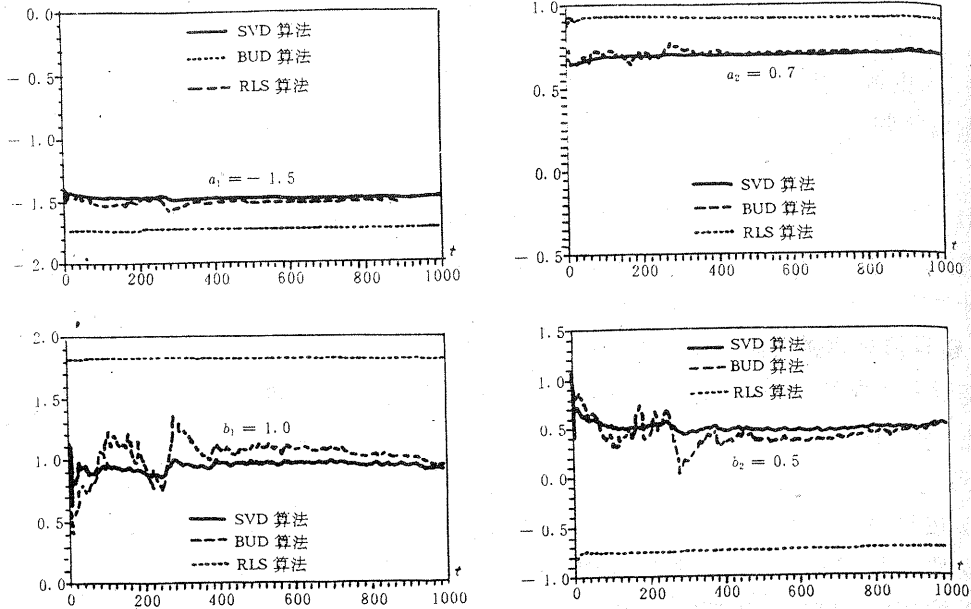


图 1 SVD, BUD 和 RLS 三种辨识算法参数估计结果曲线

效、实用的递推辨识方法.

表 1 两种辨识算法计算结果比较

ω	算法	a_1		a_2		b_1		b_2	
		$n/s = 10\%$	$n/s = 25\%$	$n/s = 10\%$	$n/s = 25\%$	$n/s = 10\%$	$n/s = 25\%$	$n/s = 10\%$	$n/s = 25\%$
0.5	SVD	-1.487891	-1.498360	0.692513	0.704365	0.9197651	0.902981	0.624366	0.647640
	RLS	-1.609544	-1.481940	0.774176	0.665009	1.705356	1.485365	-0.588314	-0.079306
1.0	SVD	-1.493725	-1.499791	0.694430	0.701291	0.996679	1.022846	0.512351	0.496979
	RLS	-2.025833	-1.696558	1.301157	0.913873	2.055974	1.433690	-0.829127	0.003187
1.5	SVD	-1.496565	-1.500512	0.701658	0.704837	0.993043	0.989833	0.499280	0.499422
	RLS	-1.456544	-1.497061	0.641689	0.697811	0.950185	0.986209	0.537600	0.502137
2.0	SVD	-1.499115	-1.502410	0.704855	0.707063	0.991701	0.980458	0.493225	0.485462
	RLS	-1.067806	-1.388106	0.288876	0.596667	0.724764	0.907647	0.539807	0.490437
2.5	SVD	-1.499117	-1.502002	0.704634	0.706613	1.005207	1.013804	0.497498	0.494941
	RLS	-1.221316	-1.443717	0.426972	0.648649	0.860095	0.972167	0.472990	0.478835
3.0	SVD	-1.499111	-1.501789	0.703638	0.705971	1.036133	1.093462	0.533088	0.585699
	RLS	-1.389501	-1.483844	0.591457	0.687722	0.938371	1.034105	0.471068	0.532563
参数真值		-1.5		0.7		1.0		0.5	

6 结束语

本文基于矩阵的奇异值分解技术,提出了一种递推最小二乘辨识新方法,该方法不仅收敛速度快、数值稳定性和辨识精度高,而且当被辨识系统输入不满足持续激励条件时,仍能得到参数的无偏估计,降低了系统辨识对输入信号的要求,提高了递推辨识算法的鲁棒性、实用性,为系统辨识、自适应控制的实际工程应用提供了一种有效的递推辨识方法.

参 考 文 献

- [1] Ljung, L. and Soderstrom, T. Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, 1983
- [2] Astrom, K. J. and Wittenmark, B. Adaptive Control. Addison-Wesley Publishing Company. 1989
- [3] Goub, G. H. and Van Loan, C. F. Matrix Computations. Second Edition, London: The Johns Hopkins Press Ltd., 1989
- [4] Moore, W. C. and Franklin, G. F. An SVD-Based Identification Algorithm for Self-Tuning Control. Proc of the 29th Conf. on Decision and Control, 1990, 3249-3250
- [5] Zhang, Youmin, et al. A SVD-Based Extended Kalman Filter and Applications to Aircraft Flight State and Parameter Estimation. Proc. of 1994 American Control Conf., Maryland, June, 1994

A New Recursive Identification Method Based On Singular Value Decomposition

ZHANG Youmin, LI Qingguo, DAI Guanzhong and ZHANG Hongcai

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: Based on singular value decomposition (SVD), this paper develops a recursive least square identification method, which takes in account input excitation. It is demonstrated that the SVD-based approach proposed in here can not only obviously improve the convergency rate, numerical stability of RLS, but also provide much more precise identification results and greatly enhance the robustness of the system identification. More over, this algorithm is formulated in the form of vector-matrix and matrix-matrix operations, so it is also useful for parallel computers.

Key words: singular value decomposition; recursive least squares identification; un-biased estimation; persistent excitation

本文作者简介

张友民 1963年生. 副教授, 自控系副主任. 1983和1986年分别本科和研究生毕业于西北工业大学自控系, 获工学学士和硕士学位, 1991年晋升为副教授. 目前主要研究方向为滤波、辨识与随机控制, 神经网络及其在控制中的应用, 故障诊断与容错控制及控制中的并行处理等.

李庆国 1970年生. 1992年毕业于西北工业大学飞行器制造工程系, 获工学学士学位, 现为自动控制理论及应用专业硕士研究生. 目前主要研究方向为系统建模与随机控制, 神经网络及其应用, 故障诊断及容错控制等.

戴冠中 见本刊1995年第1期第127页.

张洪才 1938年生. 教授. 自动控制理论及应用学科博士生导师, 西北工业大学多目标跟踪技术研究中心主任. 1961年毕业于西北工业大学自动控制系, 1964年西北工业大学研究生毕业. 1981~1983年去美国威斯康星-麦迪逊大学电气及计算机工程系作访问学者. 主要研究方向为估计理论, 系统辨识, 随机控制等.