一种计算传递矩阵 H_∞ 范数的快速方法——矩阵广义符号函数法

王永骥　徐桂英　涂　健
(华中理工大学自控系·武汉,430074)

摘要：本文提出了一种基于矩阵广义符号函数的传递函数阵 H_∞ 范数的快速计算方法. 这一方法避免了以往方法中必须采用的哈密顿阵的特征值计算问题,大大加快了计算速度.

关键词：H_∞ 范数；矩阵广义符号的函数；传递函数阵；哈密顿阵

1 引　言

近年来,基于状态空间方法的 H_∞ 最优控制器设计引起了人们的广泛兴趣与重视. 文献[1]、[2]讨论了基于状态空间方法的 H_∞ 控制问题. 在上述方法及在鲁棒分析和鲁棒设计中,传递函数阵的 H_∞ 范数都起着十分重要的作用.

传递函数阵 $G(s)$ 的 H_∞ 范数定义如下:

定义 1　设传递函数阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$,记作 $G(s) = [A, B, C, D]$,A 的所有特征值均是稳定的,即 $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, \cdots n$. $G(s)$ 的 H_∞ 范数为 $G(s)$ 的最大奇异值的上确界,即

$$\| G(s) \|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \sigma_{\max}[G(s)] = \sup_{\omega \in \mathrm{R}^+} \sigma_{\max}[G(j\omega)]. \tag{1}$$

1980 年以前,H_∞ 范数的计算往往根据定义,在整个"频率"上进行搜索,计算量特别大. 1988 年,文[3]提出两分法. 1990 年,文[5]提出快速搜索法. 他们的方法都利用了传递函数阵与相应的哈密顿阵特征值的关系,因此必须计算哈密顿阵的特征值. 由于特征值计算颇费机时,上述方法尚存在改进之处.

由矩阵广义符号函数的性质,可方便地确定矩阵是否存在虚轴上的特征值及其个数,从而方便地求出 H_∞ 范数. 矩阵广义符号函数计算量大大小于特征值计算,从而可大大提高 H_∞ 范数的计算速度. 本文第 4 节例说明了这一点.

2 理论基础

设系统的传递函数阵 $G(s) = [A, B, C, D]$,A 无虚轴上特征值. 若 $\gamma > 0$,且 $\gamma \neq \sigma_{\max}(D)$,定义 $H(\gamma)$ 为

$$H(\gamma) = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C & BR^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}(I + DR^{-1}D^{\mathrm{T}})C & -A^{\mathrm{T}} - C^{\mathrm{T}}DR^{-1}B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

式中

$$R = \gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D.$$

在上述假设成立时,有

本文于 1994 年 6 月 4 日收到,1994 年 10 月 31 日收到修改稿.

命题 1　对所有的 $\omega_p \in \mathrm{R}=(-\infty,+\infty)$，$\omega_p$ 是 $H(\gamma_1)$ 的特征值 $\Leftrightarrow \gamma_1$ 是 $G(j\omega_p)$ 的奇异值.

证明见[5]，此处略.

命题 2　若 $H(\gamma_k)$ 不存在虚轴上的特征值，则对于 $\gamma>\gamma_k$，$H(\gamma)$ 也不存在虚轴上的特征值.

证　参见[5]. 由于奇异值是 ω 的连续函数，由此可得曲线如图 1. 其中，曲线 1 对应 $D=0$，曲线 2 对应 $D\neq 0$. 当 $\sigma_m(D)<r<\gamma^*$，任意 γ 与奇异值曲线至少有一个交点，$H(\gamma)$ 存在虚轴上的特征值；当 $\gamma>\gamma^*$，γ_k 与奇异值曲线无交点，$H(\gamma_k)$ 不存在虚轴上的特征值. 显然，任意 $\gamma>\gamma_k$ 也将与奇异值曲线无交点，$H(\gamma)$ 不存在虚轴上的特征值.

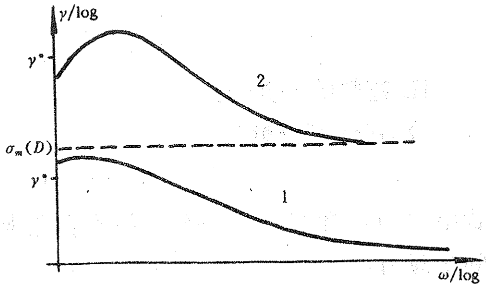

图 1　奇异值与 ω 的关系曲线

2.2　矩阵的广义符号函数[4]

一个复数的广义符号函数定义为：

$$f(\lambda)=\mathrm{sgn}(\lambda)=\begin{cases}+1, & \mathrm{Re}(\lambda)>0,\\ 0, & \mathrm{Re}(\lambda)=0,\\ -1, & \mathrm{Re}(\lambda)<0.\end{cases} \tag{3}$$

矩阵的广义符号函数定义为[5]：

$$S^*(A)=M\mathrm{sgn}(J)M^{-1}. \tag{4}$$

式中 J 为 A 的 Jordan 标准型，M 由特征向量组成. 在 A 为满秩阵时，令

$$A_r=A+kI,\quad A_l=A-kI. \tag{5}$$

式中　$k\neq \mathrm{Re}[\lambda_i(A)],\quad k<\min\limits_i|\lambda_i(A)|.$

矩阵的广义符号计算公式为

$$S^*(A)=1/2[S(A_r)+S(A_l)]. \tag{6}$$

式中 $S(\cdot)$ 为矩阵的常义符号函数. 在 A 为奇异阵时，可降阶求出其满秩子阵的广义符号函数. 记 N_s,N_u,N_c 分别为 A 中 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$，$\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$ 和 $\mathrm{Re}[\lambda_i(A)]=0$ 的极点的个数，n 为系统阶次，则：

$$N_s=\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}[S^*(A)]^2-\mathrm{tr}[S^*(A)]\}, \tag{7}$$

$$N_u=\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}[S^*(A)]^2+\mathrm{tr}[S^*(A)], \tag{8}$$

$$N_c=n-N_s-N_u.$$

2.3　H∞范数的上下界

H∞范数的下界为：

$$\gamma_{lb}=\sigma_{\max}(D)^{[3]}, \tag{9}$$

$$\gamma_{lb}=\max\{\sigma_{H,\max}(D),\sigma_{\max}(D)\}^{[6]}, \tag{10}$$

$$\gamma_{lb}=\max\{G_{\max}[G(0)],\sigma_{\max}[G(j\omega_p)],\sigma_{\max}(D)\}^{[5]}. \tag{11}$$

其中 $\sigma_{H,\max}(D)$ 为 Hankel 阵的最大奇异值，$\omega_p=|\lambda_i[G(s)]|$

$$\lambda_i = \begin{cases} \max\limits_i \dfrac{\mathrm{Im}(\lambda_i)}{\mathrm{Re}(\lambda_i)} \dfrac{1}{|\lambda_i|}, & \text{若存在 } \mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0, \\ \min\limits_i |\lambda_i|, & \text{若所有 } \mathrm{Im}(\lambda_i) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

H_∞范数的上界[3]：

设 $G(s)$ 可分解为

$$G(s) = G_-(s) + G_+(s) + D. \tag{13}$$

式中 $G_-(s)$ 和 $G_+(s)$ 分别为极点在左半平面和右半平面的严格真有理阵，对应的状态空间实现为：

$$G_-(s) = [A_-, B_-, C_-, 0], \quad G_+(s) = [A_+, B_+, C_+, 0]. \tag{14}$$

则有：

$$\| G(s) \|_\infty \leqslant 2\mathrm{tr}(R_-) + 2\mathrm{tr}(R_+) + \| D \|_\infty. \tag{15}$$

式中，R_-, R_+ 均为对角阵，其元素分别为 $P_- Q_-$ 和 $P_+ Q_+$ 特征值的非负方根. $P_- Q_-$ 和 $P_+ Q_+$ 分别满足 Lyapunov 方程：

$$A_- P_- + P_- A_-^{\mathrm{T}} = -B_- B_-^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

$$A_-^{\mathrm{T}} Q_- + Q_- A_- = -C_-^{\mathrm{T}} C_-, \tag{17}$$

$$A_+ P_+ + P_+ A_+^{\mathrm{T}} = -B_+ B_+^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

$$A_+^{\mathrm{T}} Q_+ + Q_+ A_+ = -C_+^{\mathrm{T}} C_+. \tag{19}$$

3 基于矩阵广义符号的 H_∞范数计算

由上分析可得，按上节方法求出 H_∞范数的上下界后，可用二分法或任何一种单变量寻优法在 $[\gamma_{lb}, \gamma_{ub}]$ 上搜索出 γ_{opt} 来. 广义符号函数可采用文献[7]提出的改进矩阵符号函数法. 据此，本文提出一种基于矩阵广义符号函数的 H_∞范数计算方法如下：

第一步　$k = 0$. 计算 $G(s)$ 的上下界 $\gamma_{lbk}, \gamma_{ubk}$ 初值. 式中各量意义见第三步；

第二步　令

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{2}(\gamma_{lbk} + \gamma_{ubk}), \tag{20}$$

计算 $H(\gamma_{k+1})$ 的广义符号函数，判别其有无虚轴上的特征值，即 $N_c[H(\gamma_{k+1})]$ 是否为 0；

第三步　若 $H(\gamma_{k+1})$ 存在虚轴上的特征值，即 $N_c[H(\gamma_{k+1})] \neq 0$，则

$$\gamma_{lbk} = \gamma_{k+1}, \tag{21}$$

$$\gamma_{ubk} = \gamma_{ubk}, \tag{22}$$

转第四步；否则，令

$$\gamma_{lbk} = \gamma_{lbk}, \tag{23}$$

$$\gamma_{ubk} = \gamma_{k+1}, \tag{24}$$

转第四步：

第四步　$k + 1 \Rightarrow k$，若 $|\gamma_k - \gamma_{k-1}| < \varepsilon$，结束；否则转第二步. 此处 ε 为控制精度.

由于本法中计算在上下界中间搜索，其收敛性是显然的.

4 计算实例

基于状态空间方法的 H∞控制问题为[2]

系统：
$$\dot{X} = AX + B_1\omega + B_2u, \tag{25}$$
$$Z = C_1X + D_{11}\omega + D_{12}u, \tag{26}$$
$$Y = Z. \tag{27}$$

当闭环控制律为
$$u = F_\infty X = -B_2^{\mathrm{T}}X_\infty X \tag{28}$$
时，闭环系统的传递函数阵为
$$T_{ZW}(s) = \begin{bmatrix} A - B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & B_1 \\ C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & D_{11} \end{bmatrix}. \tag{29}$$
式中 X_∞ 对称正定，为代数 Riccati 方程(30)的解.
$$X_\infty(A - B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty) + (A - B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty)^{\mathrm{T}}X_\infty + [X_\infty B_1 + (C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty)^{\mathrm{T}}D_{11}]R^{-1}$$
$$\cdot[X_\infty B_1 + (C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty)^{\mathrm{T}}D_{11}]^{\mathrm{T}} + (C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty)^{\mathrm{T}}(C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty) = 0. \tag{30}$$
式中
$$R = \gamma^2I - D_{11}^{\mathrm{T}}D_{11}.$$

在满足条件 $D_{11} = 0, D_{12}^{\mathrm{T}}[D_{12}, C_1] = [I \quad 0]$ 时，闭环传函阵为
$$T_{ZW}(s) = \begin{bmatrix} A - B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & B_1 \\ C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$
相应的哈密顿阵为
$$H(\gamma) = \begin{bmatrix} A - B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} \\ -C_1^{\mathrm{T}}C_1 - X_\infty B_2B_2^{\mathrm{T}}X_\infty & -A^{\mathrm{T}} + X_\infty B_2B_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{32}$$
对(32)式作相似变换. 取变换阵为
$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_\infty & I \end{bmatrix}. \tag{33}$$
可证 $H(\gamma)$ 的特征值与 $\overline{H}(\gamma)$ 特征值相同.
$$\overline{H}(\gamma) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}} \\ -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{34}$$
因此，$T_{ZW}(s)$ 的 H∞ 范数可由 $\overline{\mathrm{H}}(\gamma)$ 计算，与 X_∞ 无关. 此时 H∞ 范数即为闭环最优值 γ_{opt}.

在系统(25)～(27)中取
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
求状态反馈的 H∞控制问题有
$$F_\infty = \begin{bmatrix} 90.6423 & 73.7208 & -174.3812 \\ -97.1586 & -83.6190 & 169.8789 \end{bmatrix}.$$

文[3]中，利用 CAD 软件包求得

$$\gamma_{opt} = 1.759676.$$

由本文分析，γ_{opt} 可通过 $\bar{H}(\gamma)$ 求得. 采用本文方法，迭代 14 次，亦获得如上结果，但方法简单得多.

参 考 文 献

[1] Doyle, J., Glover, D., Khargonekar, D. & Francis, B.. State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34: 831—847

[2] 涂健，杨富文. H_∞状态反馈控制问题的 ARE 方法. 华中理工大学学报，1992，20(3)：101—107

[3] Robel, G.. On Computing the Infinity Norm. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34: 882—884

[4] Attarzadeh, F.. Relative Stability Test for Continuous and Sampled-Data Control Systems Using the Generalized Sign Matrix Functions. Proc. IEE, Pt. D, 1982, 129(5): 189—192

[5] Bruinsma, N. A. & Steinbuch, M.. A Fast Algorithm to the H_∞-Norm of a Transfer Function Matrix. Sys. & Cont. Lett., 1990, 14: 287—298

[6] Glover, K.. All Optimal Handel-Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L_∞-Error Bounds. Int. J. Control, 1984, 39: 1115—1193

[7] 涂健，王永骥. 一种求解 Riccati 代数方程的新方法——矩阵符号函数法. 华中理工大学学报，1987，15(4)：171—175

[8] 杨富文. H_∞优化设计理论及应用研究. 华中理工大学博士学位论文，1990

A Fast Algorithm of Computing H_∞ Norm of Transfer Function Matrix via Matrix Generalised Sign Function

WANG Yongji, XU Guiying and TU Jian

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: A fast algorithm of computing H_∞ norm of transfer function matrix based on matrix generalised sign function is presented, in which the eigenvalue computation of Hamiltanian maxtix is avoided, and the convergency is greatly accelarated.

Key words: H_∞ norm; matrix generalised sign function; transfer function matrix; Hamiltanian matrix

本文作者简介

王永骥　1955 生. 现为华中理工大学自控系副教授. 感兴趣的研究方向为：鲁棒控制，神经网络控制，工业过程的计算机控制等.

徐桂英　1945 生. 现为华中理工大学自控系副教授. 感兴趣的研究方向为：智能控制，工业过程的计算机控制等.

涂　健　1927 年生. 现为华中理工大学自控系教授. 从事的研究方向为：智能控制，鲁棒控制，自适应控制，工业过程的计算机控制等.