

## 适用于降阶模型的新型多步预测控制算法\*

徐立鸿 冯纯伯

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

**摘要:** 基于参数自校正机理在线修正预测模型的广义预测控制(GPC)<sup>[1]</sup>具有自校正控制器的共同问题——对降阶模型存在鲁棒性问题. 针对这一问题, 本文在文[2~3]的基础上, 用频域建模和时域控制相结合的方法, 提出了一种对降阶模型鲁棒的新型多步预测控制算法(NLRPC). 该方法的主要思想是: 在时域上设计出具有较大稳定裕度的加权多步预测控制算法, 并得到该算法的稳定裕度的定量结果, 再用主要频率特性拟合的方法得到对象的降阶模型, 以保证建模误差在控制算法的稳定裕度之内. 二者结合便形成了本文的算法. 理论分析及仿真均表明, 该算法对降阶模型是鲁棒的.

**关键词:** 预测控制; 自适应控制; 降阶模型; 鲁棒性

### 1 引言

广义预测控制(GPC)<sup>[1]</sup>是在自校正控制的基础上, 汲取了模型预测控制(MAC)<sup>[4]</sup>、动态矩阵控制(DMC)<sup>[5]</sup>的多步预测优化策略而发展起来的一类预测控制算法. 它具有许多自校正控制算法所不具有的优点, 例如对非最小相位对象, 时滞估计不准或是时变的对象、阶次估计不准但模型阶次高于实际对象的阶次的情形(例如所谓的过量参数化(over-parameterization)模型)等等, 均具有良好的控制性能. 然而, 理论分析与大量仿真实例均表明<sup>[6]</sup>, 它对降阶模型存在着鲁棒性问题, GPC未能克服这一自校正控制器的通病.

由于实际对象的阶次往往都很高, 使我们不得不采取降阶建模. 因此, 研究对降阶模型具有良好的鲁棒性的控制器设计方法, 具有重要的理论意义和应用价值. 本文将提出一种这样的算法. 该算法的主要思想是, 依据时域上设计的加权多步预报控制算法<sup>[2]</sup>的稳定裕度的大小, 反过来指导模型的频域辨识, 使所得到的降阶模型与对象的模型误差在算法的稳定裕度范围内, 从而使形成的新型自校正多步预测控制算法(NLRPC)对降阶建模具有良好的鲁棒性.

### 2 时域上的预测控制器设计

设被控对象为

$$A_0(z^{-1})y(t) = B_0(z^{-1})u(t-1) + \xi(t). \quad (2.1)$$

其数学模型为

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \xi(t). \quad (2.2)$$

\* 国家和江苏省自然科学基金资助项目.

本文于1994年5月19日收到.

其中  $A(z^{-1})$  和  $B(z^{-1})$  是形如

$$x(z^{-1}) = x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_{n_x} z^{-n_x} \quad (2.3)$$

的多项式,  $A(0) = 1$ .

对模型和噪声作如下假定,

i) 模型  $A(z^{-1})$  与  $B(z^{-1})$  互质.

ii) 噪声的功率有限, 即  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K |\xi(t+j)|^2 < \infty$ . a. s.

在以上假定下, 采用基于模型(2.2)的多步预报控制算法(WLPC)<sup>[2]</sup>设计控制器. 其性能指标为

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N [y(t+k) - r(t+k)]^2 + \sum_{k=1}^M [R_k(z^{-1})u(t+k-1)]^2 \right\}. \quad (2.4)$$

其中权因子  $R_k(z^{-1})$  取以下形式:

$$R_k(z^{-1}) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}, & \text{当 } 2 \leq k \leq M, \\ \sqrt{\lambda} + z^{-1} \frac{K_w(z^{-1})}{K_L(z^{-1})} \quad (K_L(0) = 1), & \text{当 } k = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

这里  $K_w(z^{-1})$  和  $K_L(z^{-1})$  为待定多项式,  $\lambda$  为待定常数 ( $\lambda > 0$ ).

极小化(2.4)的 WLPC 控制器<sup>[2]</sup>为

$$\mathcal{D}u(t) + \mathcal{G}y(t) = \mathcal{L}r(t+N). \quad (2.6)$$

闭环系统方程为

$$(T + \tilde{T})y(t) = B_0 \mathcal{L}r(t+N) + \mathcal{D}\xi(t). \quad (2.7)$$

其中

$$T = \mathcal{D}A + z^{-1}\mathcal{G}B = \mathcal{A}K_L + z^{-1}\mathcal{B}K_w, \quad (2.8)$$

$$\tilde{T} = \mathcal{D}\tilde{A} + z^{-1}\mathcal{G}B. \quad (2.9)$$

这里,  $\mathcal{D}, \mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  均是只与模型(2.2)有关的  $z^{-1}$  多项式, 其定义见[2], 而  $\tilde{A} = A_0 - A$ ,  $\tilde{B} = B_0 - B$  为建模误差.

由假定 i) 立得  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  互质, 故对任意设置的稳定多项式  $T$ , 方程(2.8)有唯一解  $K_w$  和  $K_L$ . 于是:

1) 当模型与对象一致 ( $\tilde{T} = 0$ ) 时, 闭环方程为

$$Ty(t) = B\mathcal{L}r(t+N) + \mathcal{D}\xi(t). \quad (2.10)$$

WLPC 算法通过选取权因子  $K_w$  和  $K_L$  实现了闭环极点配置  $T$ , 保证了闭环稳定性.

2) 当建模误差存在时 ( $\tilde{T} \neq 0$ ), 可通过选取  $T$  使算法具有较好的稳定裕度, 从而对建模误差有较好的鲁棒性. 这一结果由以下的鲁棒性定理给出.

**定理** 对稳定的被控对象和模型, 若假定 i) 和 ii) 满足, 且建模误差满足以下不等式:

$$|\tilde{G}(e^{i\omega})| < \left| \frac{T(e^{i\omega})}{A(e^{i\omega}) \cdot \mathcal{G}(e^{i\omega})} \right| = \left| \frac{S(e^{i\omega})}{\mathcal{G}(e^{i\omega})} \right| \triangleq M(S). \quad (2.11)$$

则 WLPC 闭环渐近稳定.

**注** (2.1) 中的  $\tilde{G}(z) = G_0(z) - G(z)$ ,  $G_0(z) = \frac{z^{-1}B_0}{A_0}$ ,  $G(z) = \frac{z^{-1}B}{A}$  分别为对象(2.

1) 与模型(2.2)的传递函数.  $T = AS$ ,  $S$  任取.

本定理的证明见[3].

由本定理知,要使 WLPC 算法适用于低阶模型(2.2),必须要求传递函数误差  $\tilde{G}$  的增益满足不等式(2.11),因此,必须考虑以下两个问题:

- ① 选取  $S$ , 使算法的稳定裕度  $M(S)$  尽可能地大;
- ② 由参数在线辨识所得低阶模型的频率特性应满足

(2.11). 下面分析这种可能性:

被控制对象一般都具有高频增益较小的特性(如图1),因此,低阶模型  $G$  在高频带即使与对象  $G_0$  相差较大,(2.11)也是有可能成立的. 问题的关键有两点:一是由算法的增益裕量大小  $M(S)$  确定出相应的中低频带宽  $\omega_b$ ,二是找到频率意义明确的建模方法,使所建的低阶模型在带宽  $\omega_b$  的范围内能较好地拟合对象的频率特性,即  $|\tilde{G}|(\omega \leq \omega_b)$  尽可能地小到  $M(S)$  的范围内.

一是不难做到的,下一节将给出符合二的要求的低阶模型辨识方法.

### 3 低阶模型频域辨识方法

改写模型(2.2)为以下参数形式:

$$y(t) = \varphi(t-1)^T \theta + \xi(t). \quad (3.1)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} \varphi(t) = [-y(t), \dots, -y(t-na+1), u(t), \dots, u(t-nb)]^T, \\ \theta = [a_1, \dots, a_{na}, b_0, b_1, \dots, b_{nb}]^T. \end{cases} \quad (3.2)$$

由模型和对象得到输出  $y(t)$  的一步向前预报误差为:

$$\varepsilon(t, \theta) = \tilde{G}(z, \theta)u(t) + \xi(t). \quad (3.3)$$

引进一个稳定的预滤波器  $L(z, f)$ , 经滤波后的预报误差为: ( $f$  为滤波器参数)

$$\varepsilon_F(t, \theta, f) = L(z, f)\varepsilon(t, \theta), \quad (3.4)$$

极小化如下风险函数:

$$V_K(\theta, Y^K) = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K \varepsilon_F^2(t, \theta, f) \quad (3.5)$$

的参数估计为

$$\hat{\theta}_K = \arg \min V_K(\theta, Y^K). \quad (3.6)$$

当降阶建模时,对象不属于模型集. L. Ljung 等<sup>[7]</sup>证明,在适当条件下,

$$\hat{\theta}_K \rightarrow \theta^* = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\varepsilon_F}(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

其中,  $\Phi_{\varepsilon_F}(\omega)$  为  $\varepsilon_F$  的谱,这里采样间隔取为 1.

考虑  $\Phi_{\varepsilon}(\omega) = 0$  的情形,在 WLPC 控制器  $u(t)$  的作用下, (3.7) 的渐近描述为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(e^{i\omega}, \theta)|^2 \cdot |A(e^{i\omega}, \theta)|^2 \cdot |L(e^{i\omega}, f)|^2 \cdot \Phi_u(\omega) d\omega. \quad (3.8)$$

其中

$$\Phi_u(\omega) = \frac{|\mathcal{L}(e^{i\omega})|^2}{|\mathcal{D}(e^{i\omega}) + \mathcal{G}(e^{i\omega})G_0(e^{i\omega})|^2} \Phi_r(\omega). \quad (3.9)$$

上式表明了控制器、预滤波器和参考信号谱对估计模型的偏差的增益  $|\tilde{G}|^2$  的影响.

由(3.8)式可知,在辨识通道内加入预滤波器  $L(z, f)$  后,只要取  $L$  为突出带宽  $\omega_b$  的频带的带通滤波器,便能使  $|L(e^{i\omega}, f)|^2 \Phi_u(\omega)$  (即经预滤波器后的输入信号谱)“集中”在

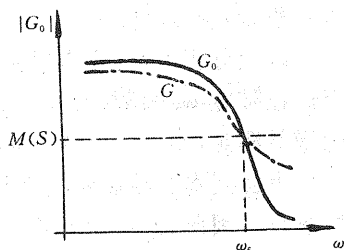


图1  $G_0, G$  的增益特性

此频带上,从而使辨识出的模型参数  $\theta^*$  所对应的低阶模型  $G$  在此频带上与对象的模型误差增益  $|\tilde{G}(e^{j\omega})|^2$  较小.

以上分析表明,引入带宽  $\omega_b$  上的带通预滤波器  $L$ ,并适当选取其增益  $|L|^2$ ,确实能够保证在带宽  $\omega_b$  的频率范围内,低阶模型能较好地拟合高阶对象的频率特性,使模型误差的增益满足  $|\tilde{G}| < M(S)$ ,  $\omega \leq \omega_b$ . 后面的仿真图例也说明了这一点.

考虑到本文控制器的设计需要参数估计  $\theta_t$  满足  $A(\theta_t)$  与  $B(\theta_t)$  互质(否则极点配置不能进行),因此,需对原有的参数最小二乘辨识方法作些修改,为此,采用以下修改算法:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_t = \theta_t + F_t \beta_t, \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \lambda_t F_t X_{t-1} e_t, \\ F_t = F_{t-1} - \frac{\lambda_t F_{t-1} X_{t-1} X_{t-1}^T F_{t-1}}{1 + \lambda_t X_{t-1}^T F_{t-1} X_{t-1}}, \\ X_{t-1} = \frac{\varphi_F(t-1)}{1 + \|\varphi_F(t-1)\|}, \quad \varphi_F(t-1) = L(z, f) \cdot \varphi(t-1), \\ e_t = \bar{y}_F(t) - \theta_{t-1}^T X_{t-1}, \quad y_F(t) = L(z, f) \cdot y(t), \\ \bar{y}_F(t) = \frac{y_F(t)}{1 + \|\varphi_F(t-1)\|}, \\ \lambda_t = \begin{cases} 0, & \text{若 } \omega_t^2 \leq \bar{\delta}_t^2, \\ 1, & \text{其它,} \end{cases} \\ \omega_t = (e_t^2 + X_{t-1}^T F_{t-1} X_{t-1})^{1/2}, \\ \bar{\delta}_t^2 = \alpha(\delta_t^2 + \varepsilon \delta_t), \quad (\varepsilon > 0), \\ \alpha = 1 + \text{tr} F_0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

以上算法及  $\beta_t$  的计算方法见文[8]. 该文证明了如下结果:

- 1° 在自校正过程中,  $A(\bar{\theta}_t)$  与  $B(\bar{\theta}_t)$  互质;
- 2°  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t = \theta^* (F_t \rightarrow 0)$ .

结论 1° 保证了在自校正过程中,极点配置方程不会发生奇异现象,结论 2° 保证模型参数最终收敛于  $\theta^*$ ,极点配置方程的解将最终收敛于模型  $G(\theta^*)$  所对应的解.

#### 4 新型自校正多步预测控制算法(NLRPC)

综合以上两节,得到本文算法如下:

- 1) 选取稳定的  $S(z^{-1})$ , 使  $|S(e^{j\omega})|$  尽可能地大;
- 2) 根据对象  $G_0$  的增益特性和  $S$ , 确定控制器的增益稳定裕量  $M(S)$ , 从而得到图 1 所述的对应于  $M(S)$  的带宽  $\omega_b$ ;
- 3) 选取频带  $\omega < \omega_b$  上的带通预滤波器  $L(e^{j\omega}, f)$ , 其增益  $|L|$  适当大些;
- 4) 用辨识算法(3.10)对模型实施预辨识,此时第二节的控制器暂不投入,而采用一简单的常值控制器.
- 5) 待辨识模型  $G(\bar{\theta}_t)$  进入本文控制算法的稳定界域(2.11)内,将本文控制算法切换进自校正过程中.

6) 适时检验(2.11)是否满足,若在某一  $\bar{\theta}_t$  时不满足,则采用前一时刻的控制器  $u(\bar{\theta}_{t-1})$ , 由(2.11)式构成的监督级(supervisor)自始至终参加自校正过程.

说明:① 算法采用预辨识<sup>4)</sup>是为了防止算法初始投运时,由于初始值选取不当而破坏(2.11)式;② 监督级的采用(第6)步)是为了排除在自校正过程中由于可能的某几个 $\bar{\theta}_i$ 估计不好(注:不可能出现无穷个这样的 $\bar{\theta}_i$ ,否则 $\bar{\theta}_i \rightarrow \theta^*$ )而破坏算法的稳定性,以保证鲁棒性条件(2.11)始终成立。

本文的NLRPC算法结构见图2。

从本文算法的构成知,经过有限步后,鲁棒性条件(2.11)始终得到保证,故算法对降阶模型是稳定的。

## 5 仿 真

设仿真对象为

$$y(t) - 1.3y(t-1) + 0.42y(t-2) = 0.5u(t-1) + 0.2u(t-2) + 0.01\xi(t).$$

此是二阶系统,采用如下一阶模型在线建模:

$$G(z, \theta) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

辨识参数为

$$\theta = (a_1, b_1)^T.$$

取 $N = 4, M = 1, \lambda = 1, S(z^{-1}) = 1 + 0.3z^{-1}$ ,对应 $M(S)$ 的频率区间(带宽) $\omega_b \leq 6\text{rad/s}$ ,故预滤波器 $L(z, f)$ 选取为 $1.5\text{rad/s} \sim 5.5\text{rad/s}$ 上的10阶Butterworth带通滤波器.在模型辨识通道中加入此预滤波器后,输入谱 $\Phi_u(\omega) |L(e^{j\omega}, f)|^2$ 及估计模型的幅频曲线分别见图3和图4,它表明,预滤波器的加入确实能使辨识出的低阶模型在带宽范围内能较好地拟合高阶对象的频率特性.采用本文算法的输出跟踪(跟踪设定值为一方波信号)情况见图5.作为比较,用不加预滤波器的辨识算法的仿真情况分别见图6、图7和图8.

以上仿真结果表明,预滤波器的引入成功地抑制了自校正在线低阶建模时闭环输入信号的频谱逐渐移向高频,从而导致模型与对象的失配(频域意义的)越来越大,最后超出控制器所能承受的范围而使自适应系统不稳定.带有预滤波器和鲁棒监督级的本文算法,对降阶建模的鲁棒性是比较好的.

## 6 结 论

本文的NLRPC算法有以下几个特点:

1) 加预滤波器后的模型参数辨识方法,使所得的低阶模型有明确的频率特征,因而使建模误差具有明确的频率特性——高频部分的增益误差大一些,低频增益基本拟合.这基本上满足了控制算法的稳定裕度的要求.

2) 在算法结构上,加上了保证辨识与控制器设计在线结合满足稳定性条件的鲁棒监督级,以最终保证算法的稳定性.

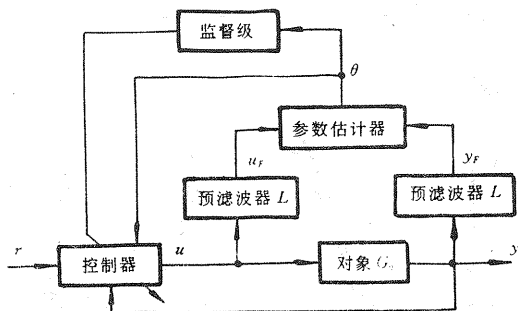


图2 本文NLRPC算法的结构框图

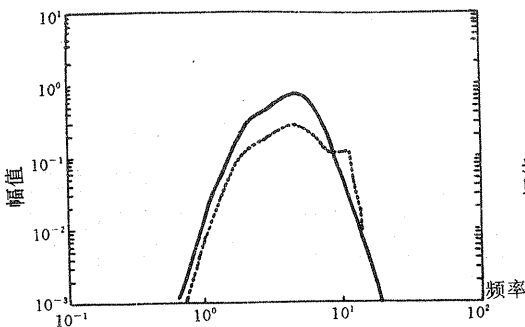


图3 加预滤波器后的输入谱  $\Phi_u(\omega) |L(e^{j\omega}, f)|^2$

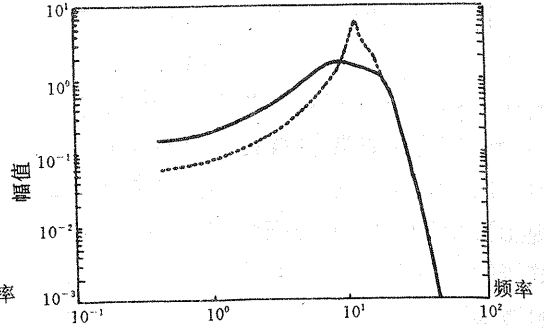


图6 未加预滤波器的输入谱  $\Phi_u(\omega)$

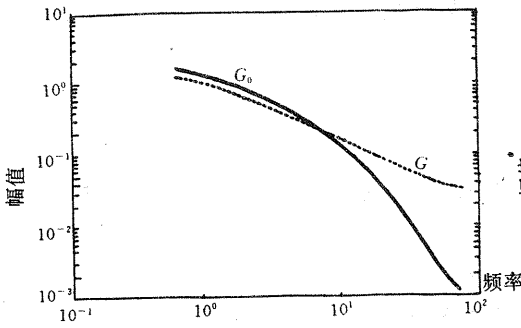


图4 加预滤波器的估计模型

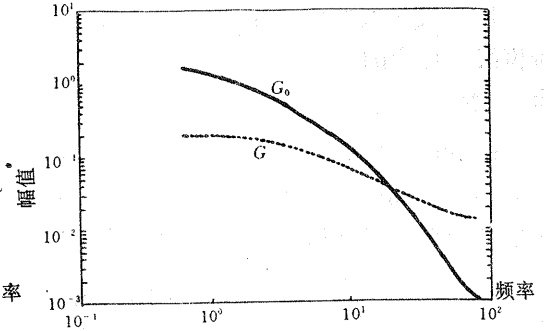


图7 未加预滤波器的估计模型

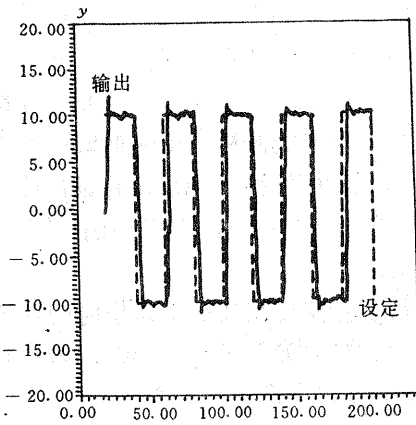


图5 本文 NLRPC 算法输出跟踪

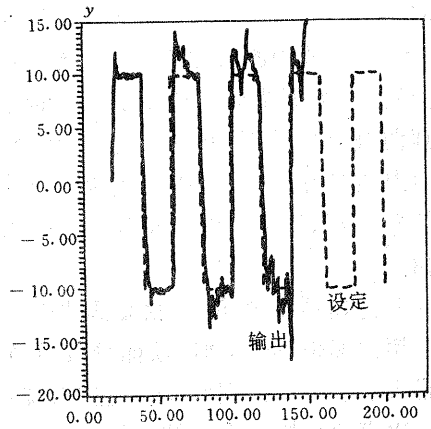


图8 降阶模型时(未加预滤波器)的 GPC

参 考 文 献

[1] Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. . Generalized Predictive Control— I . The Basic Algorithm, II . Extensions and Interpretations, Automatica, 1987, 23:137—160  
 [2] 徐立鸿,冯纯伯. 加权多步预报控制. 自动化学报, 1991, 17(6):658—668  
 [3] 徐立鸿,冯纯伯. 加权多步预报控制的鲁棒性的频域分析. 自动化学报, 1993, 19(6):724—727

- [4] Roubani, R. and Mehra, R. K. . Model Algorithmic Control (MAC): Basic Theoretical Properties. Automatica, 1982, 18(4): 401—414
- [5] Cutler, C. R. and Ramaker, B. L. . Dynamic Matrix Control—A Computer Control Algorithm. Proceedings of JACC 1980 San Francisco. WP 5-B
- [6] 徐立鸿, 冯纯伯. 论广义预测控制. 控制与决策, 1992, 7(4): 241—246
- [7] Wahlberg, B. and Ljung, L. . Design Variables for Bias Distribution in Transfer-Function Estimation. IEEE Trans. Automat. Contr. , AC-31(2): 134—144
- [8] Lozano, R. and X. H. Zhao. Adaptive Pole Placement without Excitation Probing Signals. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1994, AC-39(1): 47—58

## A New Long-Range Predictive Control Algorithm Based on a Reduced Model

XU Lihong and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing, 210018, PRC)

**Abstract:** Aim at the problem that GPC has a poor robustness to the reduced order model, we propose a new long-range predictive control algorithm (NLRPC) based on a new idea that is to combine the modelling in frequency domain with the controller design in time domain in this paper. The main design idea is as follows: by introducing a prefilter in the identification part we have a low order model that is reliable in the selected frequency interval, while it is uncertain in other frequency ranges. The uncertainty could then be fed into the robustness boundary of the weighted long-range predictive controller, and obtain the robust adaptive NLRPC. Both theoretical analysis and simulation show that NLRPC has a good robustness to the reduced model.

**Key words:** predictive control; adaptive control; reduced model; robustness

### 本文作者简介

**徐立鸿** 1960年生. 1988年在上海华东师范大学数学系控制理论专业获理学硕士学位. 1991年5月毕业于东南大学自动化研究所并获工学博士学位. 现为该研究所教授, 副所长, 目前主要从事预测控制, 系统辨识与自适应控制, 鲁棒及智能化控制理论及其应用的研究.

**冯纯伯** 见本刊1995第1期第33页.