第12卷第4期
1995年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 12, No. 4
Aug., 1995

SISO 多率离散系统 l^1 优化问题求解研究*

吴 俊
(浙江大学工业控制研究所·杭州,310027)
方华京
(华中理工大学自动控制系·武汉,430074)

摘要：采样系统 l^1 优化设计的关键在于多率离散系统 l^1 优化问题的解决.本文讨论了其基本问题的性质；证明了对于基本SISO多率 l^1 优化问题，总可以通过构造相应的单变量 l^1 优化问题或多变量易求解 l^1 优化问题，求得次优解.

关键词：采样系统；控制系统综合；多率离散系统 l^1 优化

1 引　言

采样系统是由连续的被控对象与离散的控制器通过采样器、保持器联结而形成的反馈控制系统，直接基于采样系统的分析设计，较基于离散系统或连续系统的分析设计更实际.在基于离散系统的 l^1 优化设计理论[1,2]以及基于连续系统的 L^1 优化设计理论[3]出现后，采样系统 L^1 优化设计问题开始得到研究[4].由于采样系统的复杂性，因而它的 L^1 优化求解比前面两者更复杂. Dullerud 和 Francis 给出了一个求解途径[4]，即求解一系列多率离散系统 l^1 优化问题可以任意逼近采样系统 L^1 优化问题的最优解.本文针对 SISO 采样系统探讨多率 l^1 优化问题的性质及解法.

2 预备知识

令空间 $l^\infty = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots), \sup_i |\alpha_i| < \infty, \alpha_i$ 为实数$\}$，定义 l^∞ 空间元素 α 的范数 $\|\alpha\|_{l^\infty} = \sup_i |\alpha_i|$；令空间 $l_N^\infty = \left\{\beta \mid \beta = \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N\end{bmatrix}, \beta_j \in l^\infty\right\}$，定义 l_N^∞ 空间元素 β 的范数 $\|\beta\|_{l_N^\infty} = \max_j \|\beta_j\|_{l^\infty}, (j = 1, \cdots, N)$.若 $N = 1$，则 l_N^∞ 空间即是 l^∞ 空间.

定义映射

$$\varphi:\quad l^\infty \to l_N^\infty : (\alpha_0, \alpha_1, \cdots) \mapsto \begin{bmatrix}(\alpha_0, \alpha_N, \cdots) \\ \vdots \\ (\alpha_{N-1}, \alpha_{2N-1}, \cdots)\end{bmatrix},$$

映射 φ 是可逆的，其逆映射

$$\varphi^{-1}: l_N^\infty \to l^\infty : \begin{bmatrix}(\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots) \\ \vdots \\ (\beta_{N1}, \beta_{N2}, \cdots)\end{bmatrix} \mapsto (\beta_{11}, \cdots, \beta_{N1}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{N2}, \cdots).$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1993年10月27日收到.1994年12月31日收到修改稿.

令 ψ 为由全体 $m \times n$ 维 BIBO 稳定传递函数矩阵构成的空间，对于 ψ 中的元素 $\hat{R}$，设

$$R = \begin{bmatrix} (r_{11}(0), r_{11}(1), \cdots) & \cdots & (r_{1n}(0), r_{1n}(1), \cdots) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (r_{m1}(0), r_{m1}(1), \cdots) & \cdots & (r_{mn}(0), r_{mn}(1), \cdots) \end{bmatrix}$$

是 $\hat{R}$ 的脉冲响应矩阵，$\hat{R}$ 可以被视为 l_n^∞ 空间到 l_m^∞ 空间的线性算子，即

$$\hat{R}: l_n^\infty \to l_m^\infty : f \mapsto R * f.$$

$*$ 表示卷积，由此引入 ψ 空间元素 $\hat{R}$ 的范数

$$\| \hat{R} \|_\psi = \sup_{\substack{f \in l_n^\infty \\ f \neq 0}} \frac{\| \hat{R} f \|_{l_m^\infty}}{\| f \|_{l_n^\infty}} = \max_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} | r_{ij}(k) |,$$

在上述范数下，ψ 空间与 l_{mn}^1 空间同构[2]，有 $\| \hat{R} \|_\psi = \| \hat{R} \|_1$，$\| \cdot \|_1$ 表示 l_{mn}^1 范数，在 $m = 1, n = 1$ 时，$\| \cdot \|_1$ 即表示 l^1 范数.

设内稳定的单变量 N 周期时变线性离散系统如图 1 所示. 其中 P, T 均为 N 周期时变算子，令 $u_1, u_2 \in l^\infty$，那么 e_1, e_2, y_1, y_2，均属于 l^∞ 空间. 依据图 1 系统构造 N 输入-N 输出离散系统如图 2 所示，由文献[5]可以知道：

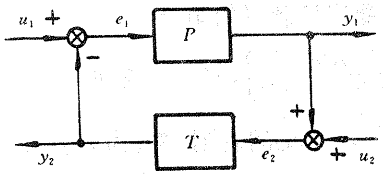

图 1　N 周期时变系统结构图

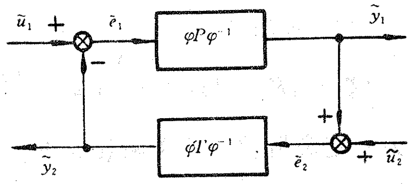

图 2　N 输入-N 输出系统结构图

1) 图 2 系统是内稳定的 LTI 系统.

2) $$\sup_{\substack{u_j \neq 0 \\ u_j \in l^\infty}} \frac{\| e_i \|_{l^\infty}}{\| u_j \|_{l^\infty}} = \sup_{\substack{\tilde{u}_j \neq 0 \\ \tilde{u}_j \in l_N^\infty}} \frac{\| \tilde{e}_i \|_{l_N^\infty}}{\| \tilde{u}_j \|_{l_N^\infty}}, \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2).$$

线性时不变系统可以视作 N 周期时变系统. 对于一个离散 LTI 系统，其脉冲传递函数可以唯一地写成

$$P(z^{-1}) = P_1(z^{-N}) + z^{-1} P_2(z^{-N}) + \cdots + z^{-(N-1)} P_N(z^{-N}),$$

那么

$$\tilde{P}(z^{-1}) = \varphi P(z^{-1}) \varphi^{-1} = \begin{bmatrix} P_1(z^{-1}) & z^{-1} P_N(z^{-1}) & \cdots & z^{-1} P_2(z^{-1}) \\ P_2(z^{-1}) & P_1(z^{-1}) & \cdots & z^{-1} P_3(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_N(z^{-1}) & P_{N-1}(z^{-1}) & \cdots & P_1(z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

设 $P(z^{-1})$ 的最小实现为 (A, B, C, D) 且 A 可逆，则[6]

$$\tilde{P}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \cdot A^{-N}z^{-1}(z^{-1}I - A^{-N})^{-1}[A^{N-1}B \ A^{N-2}B \cdots B].$$

3 问题的描述

图 3 所示为 SISO 多率离散系统的结构. 其中连续 SISO 被控对象 $G(s)$ 的最小实现为 (A_G, B_G, C_G, D_G)；H, S 分别是采样周期为 h 的零阶保持器、采样器；H_n，S_n 分别是采样周期为 h/n（n 为正整数）的零阶保持器、采样器，h 满足非病态采样条件[4].

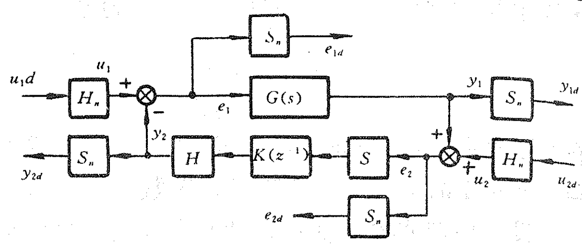

图 3 SISO 多率离散系统结构图

$G(s)$（包括零阶保持器）在采样周期 h 下的离散脉冲传递函数可以唯一地写成 $n_G(z^{-1})/d_G(z^{-1})$，$n_G(z^{-1})$ 和 $d_G(z^{-1})$ 为互质多项式，设多项式 $x_G(z^{-1})$，$y_G(z^{-1})$ 满足方程 $n_G(z^{-1})x_G(z^{-1}) + d_G(z^{-1})y_G(z^{-1}) = 1$，则稳定控制器的集合

$$\zeta = \{K(z^{-1}) \mid K(z^{-1}) = \frac{x_G(z^{-1}) + q(z^{-1})d_G(z^{-1})}{y_G(z^{-1}) - q(z^{-1})n_G(z^{-1})}, q(z^{-1}) \in \eta\}.$$

其中 η 为稳定离散脉冲传递函数的集合. 记 Φ_{1K} 为 $u_{2d} \mapsto e_{1d}$ 的映射；Φ_{2K} 为 $u_{1d} \mapsto e_{1d}$ 的映射；Φ_{3K} 为 $u_{2d} \mapsto e_{2d}$ 的映射；Φ_{4K} 为 $u_{1d} \mapsto e_{2d}$ 的映射. 考虑下列四个算子范数优化问题为基本多率离散系统 l^1 优化问题：

问题 1 $\gamma_1 = \inf\limits_{K(z^{-1}) \in \zeta} \|\Phi_{1K}\|_1.$

问题 2 $\gamma_2 = \inf\limits_{K(z^{-1}) \in \zeta} \|\Phi_{2K}\|_1.$

问题 3 $\gamma_3 = \inf\limits_{K(z^{-1}) \in \zeta} \|\Phi_{3K}\|_1.$

问题 4 $\gamma_4 = \inf\limits_{K(z^{-1}) \in \zeta} \|\Phi_{4K}\|_1.$

4 问题的解决

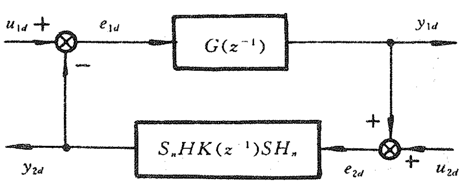

图 4 图 3 的简化

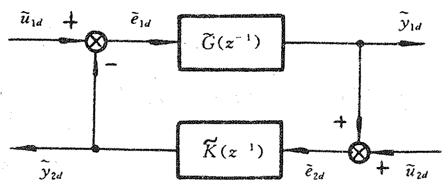

图 5 经 φ 映射变换后的图 4

设在采样周期 h/n 下，$G(s)$（包括零阶保持器）的离散脉冲传递函数

$$G(z^{-1}) = G_1(z^{-n}) + z^{-1}G_2(z^{-n}) + \cdots + z^{-(n-1)}G_n(z^{-n}),$$

则图 3 系统可以简化为图 4 所示的系统. 在采样周期 h/n 下，图 4 系统是一个 n 周期时变系统，因为 $S_nHK(z^{-1})SH_n$ 是 n 周期时变的，而 $G(z^{-1})$ 是时不变的. 依照第 2 节的预备知

识,转化图 4 系统为图 5 所示的系统,其中

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(z^{-1}) &= \varphi G(z^{-1})\varphi^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} G_1(z^{-1}) & \cdots & z^{-1}G_2(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_n(z^{-1}) & \cdots & G_1(z^{-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_0A_0^{n-2}B_0 & \cdots & D_0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_0A_0^{n-1} \end{bmatrix} A_0^{-n}z^{-1}(z^{-1}I - A_0^{-n})^{-1}[A_0^{n-1}B_0 \quad \cdots \quad B_0],\end{aligned} \tag{1}$$

$$A_0 = e^{A_G h/n}; \quad B_0 = \int_0^{h/n} e^{A_G t}B_G \mathrm{d}t; \quad C_0 = C_G; \quad D_0 = D_G,$$

$$\widetilde{K}(z^{-1}) = \varphi S_n HK(z^{-1})SH_n\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} K(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(z^{-1}) & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $\det(z^{-1}I - A_0^{-n}) = \det(z^{-1}I - e^{-A_G h}) = d_G(z^{-1})$,所以对于 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,$G_i(z^{-1})d_G(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的多项式. 设

$$\begin{cases} G^{(0)}(z^{-1}) = G_1(z^{-1}) + z^{-1}G_2(z^{-1}) + \cdots + z^{-1}G_n(z^{-1}), \\ G^{(1)}(z^{-1}) = G_1(z^{-1}) + G_2(z^{-1}) + \cdots + z^{-1}G_n(z^{-1}), \\ \qquad\cdots \\ G^{(n-1)}(z^{-1}) = G_1(z^{-1}) + G_2(z^{-1}) + \cdots + G_n(z^{-1}). \end{cases} \tag{2}$$

显然对于 $j \in \{0,1,\cdots,n-1\}$,$G^{(j)}(z^{-1})d_G(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的多项式,并且可以证明 $G^{(0)}(z^{-1}) = n_G(z^{-1})/d_G(z^{-1})$.

在多变量 l^1 优化问题

$$\inf_{q(z^{-1})\in\eta} \|R(z^{-1}) - U(z^{-1})q(z^{-1})V(z^{-1})\|_1$$

中,设 $R(z^{-1})$ 为 $n\times n$ 维多项式阵,$U(z^{-1})$ 为 $n\times 1$ 维稳定传递函数阵,$V(z^{-1})$ 为 $1\times n$ 维稳定传递函数阵. 对于这类 l^1 优化问题,可以按照固定的程序[7]求其次优解,我们称之为易求解 l^1 优化问题.

下面就第3节的四个问题展开讨论:

问题 1

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \inf_{K(z^{-1})\in\zeta} \|-\widetilde{K}(z^{-1})(I + \widetilde{G}(z^{-1})\widetilde{K}(z^{-1}))^{-1}\|_1 \\ &= \inf_{K(z^{-1})\in\zeta} \|-K(z^{-1})/(1 + G^{(0)}(z^{-1})K(z^{-1}))\|_1 \\ &= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \|-d_G(z^{-1})x_G(z^{-1}) - (d_G(z^{-1}))^2q(z^{-1})\|_1.\end{aligned}$$

这是一个单变量 l^1 优化问题,可以用文献[1]的方法求解.

问题 2

$$\gamma_2 = \inf_{K(z^{-1})\in\zeta} \|I - \widetilde{K}(z^{-1})(I + \widetilde{G}(z^{-1})\widetilde{K}(z^{-1}))^{-1}\widetilde{G}(z^{-1})\|_1$$

$$= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \left\| I - \begin{bmatrix} x_G(z^{-1}) \\ \vdots \\ x_G(z^{-1}) \end{bmatrix} [G_1(z^{-1})d_G(z^{-1}) \quad \cdots \quad z^{-1}G_2(z^{-1})d_G(z^{-1})] \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} d_G(z^{-1}) \\ \vdots \\ d_G(z^{-1}) \end{bmatrix} q(z^{-1})[G_1(z^{-1})d_G(z^{-1}) \quad \cdots \quad z^{-1}G_2(z^{-1})d_G(z^{-1})] \right\|_1$$

$$= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \|R_2(z^{-1}) - U_2(z^{-1})q(z^{-1})V_2(z^{-1})\|_1.$$

显然 $R_2(z^{-1})$ 是多项式阵,这是易求解 l^1 优化问题.

问题 3

$$\gamma_3 = \inf_{K(z^{-1})\in\zeta} \|(I + \widetilde{G}(z^{-1})\widetilde{K}(z^{-1}))^{-1}\|_1$$

$$= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \left\| I - \begin{bmatrix} G^{(0)}(z^{-1}) \\ G^{(1)}(z^{-1}) \\ \vdots \\ G^{(n-1)}(z^{-1}) \end{bmatrix} [d_G(z^{-1})x_G(z^{-1}) \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} G^{(0)}(z^{-1})d_G(z^{-1}) \\ G^{(1)}(z^{-1})d_G(z^{-1}) \\ \vdots \\ G^{(n-1)}(z^{-1})d_G(z^{-1}) \end{bmatrix} q(z^{-1})[d_G(z^{-1}) \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \right\|_1$$

$$= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \|R_3(z^{-1}) - U_3(z^{-1})q(z^{-1})V_3(z^{-1})\|_1.$$

$R_3(z^{-1})$ 是多项式阵,这亦是易求解 l^1 优化问题.

问题 4

$$\gamma_4 = \inf_{K(z^{-1})\in\zeta} \|(I + \widetilde{G}(z^{-1})\widetilde{K}(z^{-1}))^{-1}\widetilde{G}(z^{-1})\|_1$$

$$= \inf_{q(z^{-1})\in\eta} \|R_3(z^{-1})\widetilde{G}(z^{-1}) - U_3(z^{-1})q(z^{-1})V_3(z^{-1})\widetilde{G}(z^{-1})\|_1.$$

再由(1),(2)及 $R_3(z^{-1})$ 的表示式,有

$$R_3(z^{-1})\widetilde{G}(z^{-1})$$

$$= - \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix} A_0^{-n} z^{-1}(z^{-1}I - A_0^{-n})^{-1}$$

$$\cdot [I + (A_0^{n-1}B_0 + \cdots + B_0)C_0A_0^{-n}z^{-1}(z^{-1}I - A_0^{-n})^{-1}d_G(z^{-1})x_G(z^{-1})]$$

$$\cdot [A_0^{n-1}B_0 \quad \cdots \quad B_0] + R''(z^{-1})$$

$$= R'(z^{-1}) + R''(z^{-1}).$$

其中 $R''(z^{-1})$ 是多项式阵,由于 $A_0 = e^{A_G h/n}$ 可逆,$A_0^{-1} = e^{-A_G h/n}$,利用下面的定理可以证明 $R'(z^{-1})$ 是多项式阵,因此问题 4 是易求解的.

结论　基本多率离散系统 l^1 优化问题，总可以转化成单变量或多变量易求解 l^1 优化问题.

定理　设 SISO 离散系统 $P(z^{-1})$ 的最小实现为 (A,B,C,D) 且 A 可逆；令

$$n(z^{-1})/d(z^{-1}) = D - CA^{-N}z^{-1}(z^{-1}I - A^{-N})^{-1}(A^{N-1}B + \cdots + B).$$

其中 $n(z^{-1}),d(z^{-1})$ 为互质多项式，N 为任意正整数；设多项式 $x(z^{-1}),y(z^{-1})$ 满足方程 $n(z^{-1})x(z^{-1}) + d(z^{-1})y(z^{-1}) = 1$，那么

$$\begin{aligned} L(A,B,C) = & z^{-1}(z^{-1}I - A^{-N})^{-1}[I + (A^{N-1}B + \cdots + B)CA^{-N}z^{-1} \\ & \cdot (z^{-1}I - A^{-N})^{-1}d(z^{-1})x(z^{-1})] \end{aligned}$$

是多项式阵.

证　设 $A^{-N} = \begin{bmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_r \end{bmatrix}$，$E_i(i = 1,\cdots,r)$ 为约当块或单特征根，相应地

$$A^{N-1}B + \cdots + B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}, \qquad CA^{-N} = [C_1,\cdots,C_r].$$

令 a_i 是 E_i 的特征值，m_i 是 E_i 的维数，则 $d(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{r}(z^{-1} - a_i)^{m_i}$，再由已知条件 $n(z^{-1})x(z^{-1}) + d(z^{-1})y(z^{-1}) = 1$，有

$$Dd(z^{-1})x(z^{-1}) + d(z^{-1})y(z^{-1}) - x(z^{-1})\sum_{i=1}^{r}[C_iF_i(z^{-1})B_i] = 1. \tag{3}$$

其中

$$F_i(z^{-1}) = \pi_i(z^{-1})\begin{bmatrix} (z^{-1} - a_i)^{m_i-1} & \cdots & (-1)^{m_i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (z^{-1} - a_i)^{m_i-1} \end{bmatrix},$$

$$\pi_i(z^{-1}) = z^{-1}d(z^{-1})/(z^{-1} - a_i)^{m_i}.$$

对于

$$L(A,B,C) = \frac{1}{d(z^{-1})}\begin{bmatrix} F_1(z^{-1})[I + x(z^{-1})B_1C_1F_1(z^{-1})] & \cdots & F_1(z^{-1})x(z^{-1})B_1C_rF_r(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_r(z^{-1})x(z^{-1})B_rC_1F_1(z^{-1}) & \cdots & F_r(z^{-1})[I + x(z^{-1})B_rC_rF_r(z^{-1})] \end{bmatrix}$$

因为在 $i \neq j$ 时，$\pi_i(z^{-1})\pi_j(z^{-1})/d(z^{-1})$ 是多项式，所以 $L(A,B,C)$ 中的所有非对角子块均为多项式阵；将(3)式代入到 $L(A,B,C)$ 的每个对角子块中，可以验证，$L(A,B,C)$ 每个对角子块中的每个元均为 z^{-1} 的多项式，这样我们就证明了 A^{-N} 为约当矩阵时，定理成立.

若 A^{-N} 不是约当矩阵，不难用相似变换的方法证明定理依然成立.

最后需要指出，由于特征根是取值于复数域的，因此上述证明中的多项式阵不排斥复系数多项式阵，但是只要 A,B,C,D 是实数阵(实际系统就是如此)，$L(A,B,C)$ 就必定是实数阵，因而是实系数多项式阵.

致谢　感谢华中理工大学自控系李浚源教授和陈锦江教授的指导.

参考文献

[1] Dahleh, M. A. and Pearson, J. B.. l^1 Optimal Feedback Controllers for Discrete-time Systems. Proc. Amer Contr. Conf, 1986, 1964—1968

[2] Dahleh, M. A. and Pearson, J. B.. l^1 Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-Time Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(4): 314—322

[3] Dahleh, M. A. and Pearson, J. B.. L^1-Optimal Compensators for Continuous-Time Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(10): 889—895

[4] Dullerud, G. E. and Francis, B. A.. L^1 Analysis and Design of Sampled-Data Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(4): 436—446

[5] Dahleh, M. A., Voulgaris, P. G. and Valavani, L. S.. Optimal and Robust Controllers for Periodic and Multirate Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(1): 90-99

[6] Khargonekar, P. P., Poolia, K. and Tannenbaum, A.. Robust Control of Linear Time-Invariant Plants Using Periodic Compensation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(11): 1088—1096

[7] 方华京. 控制系统 l^1 优化理论及应用. 华中理工大学博士论文, 武汉, 1991

Research on the Solution for SISO Multirate Discrete-Time System l^1 Optimization Problems

WU Jun

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University·Hangzhou, 310027, PRC)

FANG Huajing

(Department of Automatic Control Engineering, Huazhong University of Science and Technology·Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: This paper discusses the properties on the primitive SISO multirate discrete-time system l^1 optimization problem. The problem is the key to the sampled-data system l^1 optimal design. It is demonstrated that by constructing an SISO l^1 problem or an MIMO l^1 problem which can be treated easily, the suboptimal solution of the primitive multirate l^1 problem can be obtained.

Key words: sampled-data system; control system synthesis; multirate discrete-time system l^1 optimization

本文作者简介

吴 俊 1967年生. 分别于1989年、1994年在华中理工大学自控系获学士、博士学位, 现为浙江大学工业控制研究所博士后, 研究方向为机器人控制、鲁棒控制.

方华京 1955年生. 分别于1982、1984和1991年在华中理工大学自控系获学士、硕士和博士学位, 现为华中理工大学自控系教授. 研究方向为鲁棒控制理论及其工程应用、控制系统计算机辅助设计.