第12卷第4期
1995年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 12, No. 4
Aug., 1995

区间多项式族根分布不变性的一个充分条件

黄献青 瞿 坦 陈锦江
(华中理工大学自动控制系·武汉,430074)

摘要:本文利用广义剔零原理,讨论了区间多项式族根分布问题,得到一区间多项式族具有相同的根分布的充分条件是某一同次多项式在负实轴上是严格正实的,且族中有一元有此分布.

关键词:鲁棒控制;区间多项式族;广义剔零原理

1 引 言

1978年,苏联学者Kharitonov证明了一族区间多项式的Hurwitz稳定性可以由四个顶点多项式(称为Kharitonov多项式)的Hurwitz稳定性来确定[1]. 1984年以后,西方学者逐渐意识到Kharitonov定理在控制系统鲁棒性研究中的重要性,随后掀起了在系数空间中研究系统鲁棒性的热潮,人们从各个不同侧面对Kharitonov定理进行了有意义的推广[2],如Bartlett,Hollot和黄琳的棱边定理,Chapellat等人的鲁棒小增益定理;黄琳、王龙的边界定理等.

最近有些工作将着眼点放在根分布上[3,4].多项式族根分布问题是一类比鲁棒意义更广的问题,它有明显的物理背景,如在利用Nyquist准则来判断闭环系统稳定性时,必须知道开环系统的极(零)点分布情况.文[3]得到了根分布问题的一个基本定理——广义剔零原理.本文基于这一原理得到某一特定多项式在负实轴上的严格正实性就可以保证一区间多项式族具有相同的根分布.这一结果为确定具有相同的根分布特别是稳定的多项式族的系数变动区间提供了一种方法.在第四节,我们用实例阐述了这一点.

2 广义剔零原理及其特殊形式

记$\mathscr{D}$为复平面上任一由若干个连通集组成的开区域,$\mathscr{D}^c$,$\partial\mathscr{D}$分别为其补集及边界.

定义 称$f(s)$具$\mathscr{D}_r$分布,系指n次复系数多项式$f(s)$在$\mathscr{D}$中有r个根,在$\mathscr{D}^c$,$\partial\mathscr{D}$中有$n-r$个根,记为$f(s)\in\mathscr{D}_r$.特别地若$f(s)\in\mathscr{D}_n$,则称$f(s)$为$\mathscr{D}$稳定.称一个多项式族$\boldsymbol{F}$具$\mathscr{D}_r$分布,系指该族中的每一个多项式均具$\mathscr{D}_r$分布,记为$\boldsymbol{F}\subset\mathscr{D}_r$

引理1[3](广义剔零原理) 对于复平面上的任一由若干个连通集组成的开区域$\mathscr{D}$,多项式族$F(s,Q)=\{f(s,q)\mid f(s,q)$为$n$次复系数多项式,$q\in Q\}$,其中$f(s,q)$的系数是$q$的连续函数,$Q\subset \mathrm{R}^m$是一连通集,则$F(s,Q)\subset\mathscr{D}_r$当且仅当

i) 存在族中一多项式有此分布,即存在$q^*\in Q$使$f(s,q^*)\in\mathscr{D}_r$.

ii) 剔零,即$0\notin F(z,Q)$,$\forall z\in\partial\mathscr{D}$.

本文于1993年11月9日收到,1994年5月10日收到修改稿.

记 $C^- = \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\lambda < 0\}$， $C^+ = \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\lambda > 0\}$，

$R^- = \{\lambda \in R \mid \lambda \leqslant 0\}$， $R^+ = \{\lambda \in R \mid \lambda > 0\}$.

令 $D = C^-$， $Q = [\alpha_n, \beta_n] \times [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}] \times \cdots \times [\alpha_0, \beta_0] \subset R^{n+1}$，

则 $\partial\mathscr{D}$ 为虚轴，$\mathscr{D}^c, \partial\mathscr{D} = C^+$.

取
$$q = [q_n, q_{n-1}, \cdots, q_0]^T \in Q.$$
则有

推论 1 实区间多项式族
$$\boldsymbol{F} = \{f(s,q) \mid f(s,q) = q_n s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_0, q_n \neq 0,$$
$$\alpha_i \leqslant q_i \leqslant \beta_i, \quad i = 0,1,\cdots,n\}$$
有 r 个根位于左半平面 C^-，$n-r$ 个根位于右半平面 C^+ 的充分必要条件是

i) 存在族 $\boldsymbol{F}$ 中的多项式 $f(s,q^*)$ 有此根分布；

ii) 剔零：当 s 为纯虚数时，$\boldsymbol{F}$ 中任何元素 $f(s,q) \neq 0$.

特别地，当 $r = n$ 时，有

推论 2 实区间多项式族 $\boldsymbol{F}$ Hurwitz 稳定的充分必要条件是

i) 存在族 $\boldsymbol{F}$ 中一多项式 $f(s,q^*)$ Hurwitz 稳定；

ii) 对于纯虚数 s，族 $\boldsymbol{F}$ 中任何元素 $f(s,q) \neq 0$.

3 主要结果

对族 $\boldsymbol{F}$，我们定义多项式
$$h_m(u) = \alpha_0 + \beta_2 u + \alpha_4 u^2 + \beta_6 u^3 + \cdots,$$
$$h_M(u) = \beta_0 + \alpha_2 u + \beta_4 u^2 + \alpha_6 u^3 + \cdots,$$
$$g_m(u) = \alpha_1 + \beta_3 u + \alpha_5 u^2 + \beta_7 u^3 + \cdots,$$
$$g_M(u) = \beta_1 + \alpha_3 u + \beta_5 u^2 + \alpha_7 u^3 + \cdots,$$
那么族 $\boldsymbol{F}$ 的 Kharitonov 多项式可以写成
$$f_{11}(s) = h_m(u = s^2) + s g_m(u = s^2),$$
$$f_{12}(s) = h_m(u = s^2) + s g_M(u = s^2),$$
$$f_{21}(s) = h_M(u = s^2) + s g_m(u = s^2),$$
$$f_{22}(s) = h_M(u = s^2) + s g_M(u = s^2).$$

定理 1 实区间多项式族 $\boldsymbol{F}$ 有 r 个根位于 C^-，$n-r$ 个根位于 C^+ 的充分条件是

i) 存在族 $\boldsymbol{F}$ 中一多项式 $f(s,q^*)$ 有此根分布；

ii) 对于任何 $u \in R^-$，多项式
$$\varphi(u) = -u g_m(u) g_M(u) + h_m(u) h_M(u) > 0. \tag{1}$$

证 我们将 n 次实系数多项式 $f(s) = \sum_{i=0}^{n} q_i s^i$ 看作 R^{n+1} 中的一个点
$$f = (a_0, a_1 \cdots, a_n)^T$$
对于任一 $z \in \mathbf{C}$，值映射 $G: R^{n+1} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 为
$$G(f,z) = f(z).$$
令 $z = \rho e^{j\theta}$，则
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}G_1(f,z) \\ \mathrm{Im}G(f,z) \end{pmatrix} = G(z) f.$$

其中
$$G_1(z)=\begin{bmatrix}1 & \rho\cos\theta & \rho^2\cos 2\theta & \cdots & \rho^n\cos n\theta\\ 0 & \rho\sin\theta & \rho^2\sin 2\theta & \cdots & \rho^n\sin n\theta\end{bmatrix}.$$

定义由 Kharitonov 多项式组成的凸组合为
$$L^s[f_{11},f_{12}]=\{\lambda f_{11}(s)+(1-\lambda)f_{12}(s)\,|\,\lambda\in[0,1]\},$$
$$L^s[f_{12},f_{22}]=\{\lambda f_{12}(s)+(1-\lambda)f_{22}(s)\,|\,\lambda\in[0,1]\},$$
$$L^s[f_{22},f_{21}]=\{\lambda f_{22}(s)+(1-\lambda)f_{21}(s)\,|\,\lambda\in[0,1]\},$$
$$L^s[f_{21},f_{11}]=\{\lambda f_{21}(s)+(1-\lambda)f_{11}(s)\,|\,\lambda\in[0,1]\}.$$

当 $\omega\geqslant 0$ 时,$G_1(j\omega)(\boldsymbol{F})$ 是由 $L^{j\omega}[f_{11},f_{12}]$,$L^{j\omega}[f_{12},f_{22}]$,$L^{j\omega}[f_{22},f_{21}]$,$L^{j\omega}[f_{21},f_{11}]$ 四条线段围成的矩形[5].

1° 矩形的四条边 $L^{j\omega}[f_{11},f_{12}]$,$L^{j\omega}[f_{12},f_{22}]$,$L^{j\omega}[f_{22},f_{21}]$,$L^{j\omega}[f_{21},f_{11}]$ 满足剔零性质,即对于任一位于四条边上的多项式,均无纯虚根. 不失一般性,我们只针对 $L^{j\omega}[f_{11},f_{12}]$ 来讨论.

设不然,则存在 $\omega_0\in\mathrm{R}$,$\lambda_0\in[0,1]$ 使
$$\lambda_0 f_{11}(s_0)+(1-\lambda_0)f_{12}(s_0)=0,\quad 其中\quad s_0=j\omega_0.$$

即
$$(1-\lambda_0)h_m(u=-\omega_0^2)+\lambda_0 h_M(u=-\omega_0^2)+j\omega_0 g_m(u=-\omega_0^2)=0.$$

故
$$\begin{cases}(1-\lambda_0)h_m(-\omega_0^2)+\lambda_0 h_M(-\omega_0^2)=0, & (2)\\ \omega_0 g_m(-\omega_0^2)=0. & (3)\end{cases}$$

由(2)知,当 $\lambda_0=0$ 或 1 时　$h_m(-\omega_0^2)h_M(-\omega_0^2)=0.$　(4)

而当 $\lambda_0\in(0,1)$ 时　$h_m(-\omega_0^2)h_M(-\omega_0^2)<0.$　(5)

综合(3),(4),(5)知
$$\omega_0^2 g_m(-\omega_0^2)g_M(-\omega_0^2)+h_m(-\omega_0^2)h_M(-\omega_0^2)\leqslant 0.$$

这与(1)矛盾,故四条边具有剔零性质.

2° 考虑到在族 $\boldsymbol{F}$ 中,首项系数 $q_n\neq 0$,又 $\alpha_n\leqslant q_n\leqslant\beta_n$,所以 α_n,β_n 同号. 当 ω 充分大时
$$0\notin G_1(j\omega)(\boldsymbol{F}).$$

3° 由1°,2°知,对 $\forall\,\omega\in\mathrm{R}$,应有
$$0\notin G_1(j\omega)(\boldsymbol{F}).$$

由推论1,定理1证得.

推论 3　实区间多项式族 $\boldsymbol{F}$ Hurwitz 稳定的充分条件是

i) 存在族 $\boldsymbol{F}$ 中一多项式 $f(s,q^*)$Hurwitz 稳定;

ii) 对于任何 $u\in\mathrm{R}^-$, 多项式
$$\varphi(u)=-ug_m(u)g_M(u)+h_m(u)h_M(u)>0.$$

注　从 $h_m(u)$,$h_M(u)$,$g_m(u)$,$g_M(u)$ 的定义不难知道,$\varphi(u)$ 是与族 $\boldsymbol{F}$ 中多项式次数相同的;而多项式的 Hurwitz 稳定由 Hurwitz 定理来判断.

4　实　　例

例　多项式族
$$g(x)=x^3+\upsilon_2x^2+\upsilon_1x+\upsilon_0,\quad(其中\ \upsilon_0,\upsilon_1,\upsilon_2\in\mathrm{R})$$

当 $\upsilon_0>0$,$\upsilon_1,\upsilon_2\leqslant 0$ 时有相同的根分布(二根位于左半平面,一根位于右半平面).

这是因为，我们可以取

$$h_m(u) = \varepsilon(\varepsilon \text{为一任意小的正数}), \quad h_M(u) = v_0 + v_2 u,$$

$$g_m(u) = v_1 + u, \quad g_M(u) = u.$$

故 $$\varphi(u) = -u^2(v_1 + u) + \varepsilon(v_0 + v_2 u)$$

当 $u \leqslant 0$ 时，由于 $v_1, v_2 \leqslant 0, v_0 > 0$，故 $\varphi(u) > 0$.

另一方面，$g_1(x) = x^3 + 1$ 在左半平面有二根，右半平面有一根.

所以此多项式族有相同根分布.

参 考 文 献

[1] Kharitonor, V. L.. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. Differential'nye Uranveniya, 1978, 14(11): 2086—2088

[2] 黄琳，王龙，于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战. 控制理论与应用，1991，8(1)：11—29

[3] 王龙，黄琳. 多项式族的根分布不变性. 中国科学，A辑，1993，23(1)：75—82

[4] Soh, C. B.. On a Root Distribution Criterion for Interval Polynomials. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992. AC-37(12): 1977—1978

[5] Minnichell, R. J., Anagnost, J. J. and Descer, C. A.. An Elementary Proof of Kharitonov's Stability Theorem with Extensions. IEEE Trans Automat. Contr., 1989, AC-34(9): 995—998

A Sufficient Condition for the Invariance of Root Distribution of Interval Polynomials

HUANG Xianqing, QU Tan and CHEN Jinjiang

(Department of Automatic Control Engineering, Huazhong University of Science. and Technology·Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: In this paper, we discuss the root distribution of interval polynomials. By generalized principle of zero exclusion, we obtain that the strict positivity of a polynomial on negative axis is sufficient for the invariant root distribution of interval polynomials.

Key words: robust control; interval polynomials; generalized principle of zero exclusion

本文作者简介

黄献青 1964年生. 讲师. 1988年毕业于浙江大学应用数学系，1991年在复旦大学数学系取得理学硕士学位. 现在华中理工大学自控系任教，在职博士生. 研究兴趣：鲁棒控制，离散事件系统，人工神经元网络.

瞿 坦 1934年生，教授. 1958年毕业于哈尔滨工业大学仪器制造系研究生班，毕业后一直在华中理工大学自控系任教，主要研究方向：计算机控制，管理与故障诊断.

陈锦江 1922年生，1946年毕业于武汉大学电机系，1955年毕业于哈尔滨工业大学研究生班. 现为华中理工大学自动控制系教授，博士生导师. 研究方向为数字控制，机器人控制和机器人视觉、触觉和滑觉.