非方系统的 Morgan 问题*

许可康

(中国科学院系统科学研究所·北京,100080)

摘要：本文讨论非方系统的 Morgan 问题.利用该问题的特性及 Yokoyama-Han 标准形,得到了 MP 有解的充分必要条件:它由一组约束方程组成.对一类非方系统的 MP,这组约束方程具有良好的计算性.

关键词：Morgan 问题；非方系统

1 序 言

自 1964 年 Morgan 提出了线性时不变系统在状态反馈及输入变换下的解耦问题(也称 Morgan 问题,以下简记 MP)以来[1],已经历了 30 年.其中,输出、输入维数相等时,MP 有解的充分必要条件早已于 1967 年首先由 Wolovich & Falb 给出[2].其后,Wonham & Morse 用几何方法也给出了等价结论[3].

从 70 年代中期起,一些人先后给出了一般情形时 MP 有解的充分必要条件,但先后由其他学者给出了反例而予以否定[4~7].

最近几年来,一些学者对一些特殊形式的 MP 给出了很好的结果[7~9].本文试图用构造性方法来讨论一般情形下的 MP.

下一节,我们首先给出 MP 的已有结果与一些性质,同时介绍 Yokoyama-Han 标准形等预备知识;第三节给出本文的一些主要结果;第四节给出一个算例.

2 预备知识

讨论线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in \mathrm{R}^m, \quad y \in \mathrm{R}^p.$

定义 2.1[1] 对系统(2.1),如果存在 K 与 H,使该系统在反馈控制律

$$u = Kx + Hv \tag{2.2}$$

下所得闭环系统的传递函数阵为非异对角阵.则称系统(2.1)的 MP 有解.这时称 (K, H) 为该问题的解.

由上述定义可知,讨论系统(2.1)的 MP 时,恒可假设:i) B 列满秩; ii) C 行满秩; iii) 系统能控.

当 MP 有解时,H 必列满秩.因而必有

$$m \geqslant p.$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1994 年 12 月 31 日收到.1995 年 3 月 28 日收到修改稿.

引理 2.2[2] 当 $m = p$，系统 MP 有解的充分必要条件为

$$D = \begin{bmatrix} c_1 A^{l_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_p A^{l_p - 1} B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

非异，这里，c_i 为 C 的第 i 行，

$$l_i = \min\{j \mid c_i A^{j-1} B \neq 0\}, \quad \forall\, i \in \underline{p}. \tag{2.4}$$

由定义 2.1 知，系统 MP 的有解性在 i) 系统的坐标变换，ii) 交换输出 y 各分量的位置下是不变的. 因此，恒可假定系统(2.1)具有 Yokoyama-Han 能控标准形[10,11]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (I_v \quad 0) & & & \\ & 0 & (I_{v-1} \quad 0) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & (I_2 \quad 0) \\ -A_v & -A_{v-1} & \cdots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix},$$

$$C = [C_v \quad C_{v-1} \quad \cdots \quad C_2 \quad C_1],$$

这里，B_1 为 $n_1 \times n_1$ 阶非异阵，A_i 为 $n_i \times n_i$ 阶阵，C_i 为 $p \times n_i$ 阶阵，

$$\operatorname{rank}[B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{j-1}B] = n_1 + n_2 + \cdots + n_j, \quad j = 1, 2, \cdots, v,$$

$$v = \min\{j \mid \operatorname{rank}[B \;\; \cdots \;\; A^{j-1}B] = \operatorname{rank}[B \;\; \cdots \;\; A^{j-1}B \;\; A^jB]\},$$

$$m = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_v (\geqslant 1).$$

系统(2.1)的传递函数阵 $W(s)$ 为

$$W(s) = R(s) P^{-1}(s) B_1. \tag{2.5}$$

这里

$$\begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{d_{n_1}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s^{d_1 - 1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{d_{n_1} - 1} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} A_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s^{d_1 - 2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & s^{d_{n_2} - 2} & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \cdots \begin{bmatrix} A_v \\ C_v \end{bmatrix} (I_v \quad 0),$$

d_j 是整数集 $\{n_1 - j + 1, n_2 - j + 1, \cdots, n_v - j + 1\}$ 中正整数的个数($j = 1, 2, \cdots, n_1$)，满足

$$v = d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_{n_1} (\geqslant 1).$$

而系统(2.1)在反馈控制律(2.2)下所得闭环系统的传递函数阵 $\overline{W}(s)$ 为

$$\overline{W}(s) = R(s) P_k^{-1}(s) B_1 H. \tag{2.6}$$

其中，$P_k(s)$ 为与 $P(s)$ 具有相同列次 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{n_1}\}$ 的列首一多项式阵，只是将 $P(s)$ 中的 A_i 换成 $\overline{A}_i$

$$\overline{A}_i = A_i - B_1 K_i, \quad \forall\, i \in \underline{v},$$

而(2.2)式中的 K 为

$$K = [K_v \quad K_{v-1} \quad \cdots \quad K_2 \quad K_1].$$

引理 2.3[12] 对 $(A+BK)^j$ 有如下关于 A 及 $(A+BK)$ 的混合展式：

$$(A+BK)^j = A^j + A^{j-1}BK + A^{j-2}BK(A+BK) + \cdots + ABK(A+BK)^{j-2} + BK(A+BK)^{j-1}. \tag{2.7}$$

由此混合展式知

$$c_iA^{j-1}B = c_i(A+BK)^{j-1}B,\quad \forall\ j=1,2,\cdots,l_i,\quad \forall\ i\in \underline{p},\quad \forall\ K. \tag{2.8}$$

同时，系统(2.1)MP 的有解性在状态反馈与输入非异变换(称此为正则反馈[8])

$$u = Kx + G\bar{u},\quad |G|\neq 0$$

下不变.

因此，我们恒可假设系统(2.1)除具有 Yokoyama-Han 能控标准形外，还可进一步假设 A 阵中的 $A_i=0(\forall\ i\in \underline{v})$，再适当交换 y 各分量的次序，使由(2.3)式确定的 $p\times m$ 阶阵 D 具有如下形式：

$$D=\begin{bmatrix} I_e & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_q\\ 0 & 0 & Q\end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

这里，Q 是 $(p-r)\times q$ 阶每行非零每列非零的矩阵，r 为 D 的秩

$$\mathrm{rank}D = r = e+q\leqslant P.$$

我们已知，D 行满秩是系统 MP 有解的充分条件；而(2.5)式中 $R(s)$ 的行满秩(这时称系统是右可逆的)是系统 MP 有解的必要条件.

3 主要结果

讨论具有 Yokoyama-Han 能控标准形中 $A_i=0$ 的右可逆系统(2.1)的 MP，并设它的 D 阵具有式(2.9)的形式，我们有

定理 3.1 对上述系统，如果 $e+q<p$. 则该系统 MP 有解 (K,H) 时，H 必具有如下形式

$$H=\begin{bmatrix} H_1\\ 0\end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

其中 H_1 为 $(m-q)\times p$ 阶矩阵

证 因为系统(2.1)的 MP 有解 (K,H)，因此，方系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = (A+BK)\tilde{x} + BHv,\\ y = Cx\end{cases} \tag{3.2}$$

的 MP 有解 $(0,I)$，因而由该系统确定的

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix} c_1(A+BK)^{\tilde{l}_1-1}BH\\ \vdots\\ c_p(A+BK)^{\tilde{l}_p-1}BH\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

非异，这里

$$\tilde{l}_i = \min\{j\,|\,c_i(A+BK)^{j-1}BH\neq 0\}. \tag{3.4}$$

我们用反证法来证. 假设

$$H=\begin{bmatrix}H_1\\ \widetilde{H}_1\end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

这里，$\widetilde{H}_1$ 为 $q\times p$ 阶非零阵. 即 $\widetilde{H}_1$ 中有 $l(\geqslant 1)$ 非零行. 为下面记号方便起见，不失一般性，我们假定这 l 个非零行位于 $\widetilde{H}_1$ 的上部，这 l 个非零行必有下列两种情形之一发生：

1) rank $\widetilde{H}_1<l$; 2) rank $\widetilde{H}_1=l$.

由引理 2.3 的(2.7)式知

$$\begin{bmatrix}c_{e+1}(A+BK)^{l_{e+1}-1}BH\\ \vdots\\ c_{e+l}(A+BK)^{l_{e+l}-1}BH\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{e+1}A^{l_{e+1}-1}B\\ \vdots\\ c_{e+l}A^{l_{e+l}-1}B\end{bmatrix}H$$

$$=[0\quad 0\quad (I_l\quad 0)]\begin{bmatrix}H_1\\ \widetilde{H}_1\end{bmatrix}=[I_l\quad 0]\widetilde{H}_1.$$

这里，每行非零，亦即

$$\tilde{l}_{e+k}=l_{e+k},\quad \forall\ k\in \underline{l},$$

当 rank$\widetilde{H}_1<l$ 时，与 $\widetilde{D}$ 的非异性矛盾；当 rank$\widetilde{H}_1=l$ 时，我们再考察 $\widetilde{D}$ 的第$(e+q+1)$行到第 p 行. 由于式(2.9)中的 Q 是每行、每列均非零的阵，不失一般性，我们假定 Q 的第一行的前 l 个元素有非零元. 这时

$$c_{e+q+1}(A+BK)^{l_{e+q+1}-1}BH=c_{e+q-1}A^{l_{e+q+1}-1}BH$$

$$=(0\quad 0\quad e^1_{p-r}Q)\begin{bmatrix}H_1\\ \widetilde{H}_1\end{bmatrix}\neq 0.$$

这里，e^1_{p-r} 为$(p-r)$维第一个元素为 1，其余元素为 0 的行向量. 因此 $\tilde{l}_{e+q+1}=l_{e+q+1}$，且 $\widetilde{D}$ 中除了有 $\widetilde{H}_1$ 中 l 个无关的行外，还有这些行的一个非零线性组合，因而与 $\widetilde{D}$ 的非异性矛盾.

因此，在 H 阵必有 $\widetilde{H}_1=0$. 即 H 具有式(3.1)的形式.　　证毕.

由此，我们有

推论 3.2　系统(2.1)的 D 阵具有式(2.9)的形式时，系统 MP 有解的一个必要条件是

$$q\leqslant m-p. \tag{3.6}$$

下面我们从开、闭环系统的传递函数阵(2.5)式及(2.6)式来考察有可逆系统(2.1)的 MP.

设系统(2.1)MP 有解 (K,H)，则不失一般性，可设

$$R(s)P_K^{-1}(s)B_1H=\operatorname{diag}\{s^{-m_1},s^{-m_2},\cdots,s^{-m_p}\}.$$

由开、闭环算子的混合展式知，必有

$$\begin{gathered}m_i\geqslant l_i,\quad \forall\ i\in \underline{p},\\ \sum_{i=1}^{p}m_i\leqslant n.\end{gathered} \tag{3.7}$$

这里，H 具有式(3.1)的形式.

对列满秩阵 H，必存在 $\widetilde{H}$，使

$$G=[H\quad \widetilde{H}] \tag{3.8}$$

非异，这里的 $\widetilde{H}$ 可尽可能选取得愈简单愈好. 如 $\widetilde{H}$ 的最后 q 列可选成$[0\quad I_q]^{\mathrm{T}}$. 这时，我们

有

$$R(s)P_K^{-1}(s)B_1G=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{m_1}} & & & & \overline{w}_1(s)\\ & \frac{1}{s^{m_2}} & & & \overline{w}_2(s)\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & \frac{1}{s^{m_p}} & \overline{w}_p(s)\end{bmatrix}.$$

这里，$\overline{w}_i(s)$ 是$(m-p)$ 维严格真有理分式行向量. 于是

$$\begin{bmatrix}s^{m_1} & & & \\ & s^{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{m_p}\end{bmatrix}R(s)=\begin{bmatrix}1 & & & & \hat{w}_1(s)\\ & 1 & & & \hat{w}_2(s)\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & \hat{w}_p(s)\end{bmatrix}G^{-1}B_1^{-1}P_K(s). \tag{3.9}$$

这里

$$\hat{w}_i(s)=\alpha_{im_i-1}s^{m_i-1}+\cdots+\alpha_{i1}s+\alpha_{i0}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{i\,-k}s^{-k},\quad \forall\, i\in \underline{p}. \tag{3.10}$$

这里，α_{ij} 均为$(m-p)$ 维行向量，这时，(3.9)式可表示成

$$s^{m_i}R_i(s)=e_m^iG^{-1}B_1^{-1}P_K(s)+(0\quad \hat{w}_i(s))G^{-1}B_1^{-1}P_K(s),\quad i=1,2,\cdots,p. \tag{3.11}$$

这里，$R_i(s)$ 是 $R(s)$ 的第 i 行，e_m^i 为 m 阶单位阵 I_m 的第 i 行.

p 组等式(3.11) 的等号左端是多项式行向量，因此，虽 $\hat{w}_i(s)$ 具有(3.10) 式的罗朗展开，但$(0\quad \hat{w}_i(s))G^{-1}B_1^{-1}P_K(s)$ 也必是多项式行向量，于是，比较对应的 d_1+m_i 组 s 的幂次前的系数行向量相等，可得：

$$\left\{\begin{aligned}
&c_{i1}=(0\quad \alpha_{i\,m_i-1})G^{-1}B_1^{-1},\\
&(c_{i2}\quad 0)=(0\quad \alpha_{i\,m_i-2})G^{-1}B_1^{-1}+(0\quad \alpha_{i\,m_i-1})G^{-1}B_1^{-1}(-B_1K_1),\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&(c_{i\,m_i-1}\quad 0)=(0\quad \alpha_{i1})G^{-1}B_1^{-1}+\sum_{j=1}^{m_i-2}(0\quad \alpha_{ij+1})G^{-1}B_1^{-1}(-B_1(K_j\quad 0)),\\
&(c_{i\,m_i}\quad 0)=e_m^iG^{-1}B_1^{-1}+(0\quad \alpha_{i0})G^{-1}B_1^{-1}\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{m_i-1}(0\quad \alpha_{ij})G^{-1}B_1^{-1}(-B(K_j\quad 0)),\\
&(c_{i\,m_i+1}\quad 0)=e_m^iG^{-1}B_1^{-1}(-B_1K_1)+(0\quad \alpha_{i-1})G^{-1}B_1^{-1}\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=0}^{m_i-1}(0\quad \alpha_{ij})G^{-1}B_1^{-1}(-B(K_{j+1}\quad 0)),\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&(c_{i\,m_i+v}\quad 0)=e_m^iG^{-1}B_1^{-1}(-B_1(K_v\quad 0))+(0\quad \alpha_{i-v})G^{-1}B_1^{-1}\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=1-v}^{m_i-1}(0\quad \alpha_{ij})G^{-1}B_1^{-1}(-B_1(K_{j+v}\quad 0)).\quad i=1,2,\cdots,p.
\end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

这里，c_{ik} 为 C_k 的第 i 行 n_k 维行向量.

事实上，由

$$l_i = \min\{j \mid c_i A^{j-1} B \neq 0\}$$

的定义知：

$$\left.\begin{aligned} &c_{ij} = 0, \quad \forall\, j \in \underline{l_i - 1}, \\ &c_{il_i} \neq 0, \end{aligned}\right\} \quad \forall\, i \in \underline{p}.$$

因此，(3.12)式中有

$$\alpha_{im_i-1} = \alpha_{im_i-2} = \cdots = \alpha_{im_i-l_i+1} = 0, \quad \forall\, i \in \underline{p}.$$

在此基础上，将式(3.12)整理、归并后得：

$$\alpha_{im_i-k} = 0, \quad \forall\, k \in \underline{l_i - 1}, \quad \forall\, i \in \underline{p}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}(0 \quad \alpha_{im_i-k})G^{-1} = (c_{ik} \quad 0)B_1 + \sum_{j=1}^{k-l_i}(0 \quad \alpha_{im_i-k+j})G^{-1}(K_j \quad 0)B_1, \\ \forall\, k = l_i, \quad l_i+1, \cdots, m_i - 1, \quad \forall\, i \in \underline{p},\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$(0 \quad \alpha_{i0})G^{-1} = (c_{i\,mi} \quad 0)B_1 + \sum_{j=1}^{m_i-l_i}(0 \quad \alpha_{ij})G^{-1}(K_j \quad 0)B_1 - e_m^i G^{-1}, \quad \forall\, i \in \underline{p}, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}(0 \quad \alpha_{i-k})G^{-1} = (c_{i\,m_i+k} \quad 0)B_1 + \sum_{j=1-k}^{m_i-l_i}(0 \quad \alpha_{ij})G^{-1}(K_{k+j} \quad 0)B_1 + e_m^i G^{-1}(K_k \quad 0)B_1, \\ \forall\, k = 1, 2, \cdots, \upsilon, \quad \forall\, i \in \underline{p}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

这里，在(3.14)～(3.16)式中规定

$$\begin{cases} c_{ij} = 0, & \forall\, j > \upsilon, \\ K_j = 0, & \forall\, j > \upsilon. \end{cases}$$

因此，如果存在着非异的 G 及 $K_j(j = 1,2,\cdots,\upsilon)$ 满足关系式(3.14) ～ (3.16)，是系统(2.1)(具有 $A_i = 0$ 的 Yokoyama-Ham 能控标准形)MP 有解的必要条件，反过来，当上述关系式满足时，对应的系统(2.1)MP 必有解，这时的解(K,H) 为

$$\begin{cases} K = [K_\upsilon \quad K_{\upsilon-1} \quad \cdots \quad K_2 \quad K_1], \\ H = G\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3.17}$$

因此，我们有

定理 3.3 对于具有 $A_i = 0$ 的 Yokoyama-Han 能控标准形的系统(2.1)，其 MP 有解的充分必要条件是：存在非异的 G 及一组 $m \times n_j$ 阶阵 $K_j(j = 1,2,\cdots,\upsilon)$，使关系式(3.14) ～ (3.16) 成立，这里，m_i 由关系式(3.14) 确定且满足约束(3.7) 式. 一旦上述条件满足. 则系统 MP 的解可由(3.17)式得到.

注 3.4 关系式(3.14)～(3.16)中，既包含了一定的关于 $K_j(j = 1,2,\cdots,\upsilon)$ 中部分元的约束关系，又给出了逐次给出 $\alpha_{im_i-l_i}, \alpha_{im_i-l_i-1}, \cdots, \alpha_{i1}, \alpha_{i0}, \alpha_{i-1}, \cdots, \alpha_{i-\upsilon}$ 的表达式.

进一步，如果上述系统(2.1)的 D 阵具有式 (2.9)的形式，且

$$m - q = p \tag{3.18}$$

时，则系统 MP 有解的充分必要条件还可以表示得更明确及具有可计算性. 为此，我们把定理 3.3 的这一特例也以定理的形式给出.

定理 3.5 对于具有 $A_i=0$ 的 Yokoyama-Han 能控标准形的系统(2.1)，如果其 D 阵由(2.9)式给出且 $m-q=p$，则该系统 MP 有解的充分必要条件是：存在非异的 $H_1(\in \mathrm{R}^{p\times p})$ 及一组 $K_j(\in \mathrm{R}^{m\times n_j}, j\in \underline{v})$. 满足下列等式约束

$$\begin{cases} \left((c_{ik}\quad 0)+\sum\limits_{j=1}^{k-l_i}(0\quad \alpha_{im_i-k+j})(K_j\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}=0, \quad k=l_i,l_i+1,\cdots,m_i-1, \\ \left((c_{im_i}\quad 0)+\sum\limits_{j=1}^{m_i-l_i}(0\quad \alpha_{ij})(K_j\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}-e_p^iH_1^{-1}=0, \\ \left((c_{i\,m_i+k}\quad 0)+\sum\limits_{j=1-k}^{m_i-l_i}(0\quad \alpha_{ij})(K_{k+j}\quad 0)+e_m^i\begin{bmatrix} H_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}(K_k\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}=0, \\ \qquad\qquad k\in v, \quad \forall\, i\in \underline{p}. \end{cases} \tag{3.19}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{im_i-k}&=\left((c_{ik}\quad 0)+\sum_{j=1}^{k-l_i}(0\quad \alpha_{im_i-k+j})(K_j\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}, \quad k=l_i,l_i+1,\cdots,m_i-1, \\ \alpha_{i0}&=\left((c_{im_i}\quad 0)+\sum_{j=1}^{m_i-l_i}(0\quad \alpha_{ij})(K_j\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}, \\ \alpha_{i-k}&=\left((c_{im_i+k}\quad 0)+\sum_{j=1-k}^{m_i-l_i}(0\quad \alpha_{ij})(K_{k+j}\quad 0)+e_m^i\begin{bmatrix} H_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}(K_k\quad 0)\right)B_1\begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}, \\ &\qquad\qquad k\in \underline{v}, \forall\, i\in \underline{p}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

这里，规定

$$\begin{cases} c_{ij}=0, \\ K_j=0, \end{cases} \quad \forall\, j>v, \quad \forall\, i\in \underline{p},$$

且由(3.19)第一组约束式确定的 m_i 满足(3.7)式.

4 算 例

这一节，我们讨论由[7]提供的例.

例 4.1[7]

$$\begin{cases} \dot{x}_1=u_1, \\ \dot{x}_2=u_2, \\ \dot{x}_3=x_4, \quad \dot{x}_4=x_5, \quad \dot{x}_5=x_6, \quad \dot{x}_6=u_3, \\ \dot{x}_7=x_2+x_8, \quad \dot{x}_8=x_9, \quad \dot{x}_9=u_4, \\ y_1=x_1, \quad y_2=x_2, \quad y_3=x_1+x_3. \end{cases}$$

引入

$$x^{\mathrm{T}}=(x_3\quad x_4\quad x_5\quad x_8\quad x_7\quad x_6\quad x_9\quad x_2+x_8\quad x_1),$$
$$y^{\mathrm{T}}=(y_2\quad y_1\quad y_3).$$

可得 Yokoyama-Han 能控标准形

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} u, \\
y &= \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} x.
\end{aligned}
\right.
\qquad (4.2)
$$

这里

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} u.
$$

对系统(4.2)的 A 阵中第八行第七列的元视为零，不影响系统 MP 的有解性，在该系统中，$m = 4, p = 3, n = 9, l_1 = l_2 = l_3 = 1$ 且

$$
D = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

即 $q = 1, m - q = p$. 它满足定理 3.5 的条件. 为此，按约束(3.19)及计算表达式(3.20)来考察该系统 MP 的可解性，这里

$$
n_1 = 4, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 1.
$$

由于 $c_{11} = (0\quad 0\quad 1\quad 0)$，$c_{11}B_1\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} = (1\quad 0\quad 0) \neq 0$，因此，$m_1 = 1$，而 $c_{21}B_1\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$，$c_{31}B_1\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = 0$，所以 $m_2 \geqslant 2, m_3 \geqslant 2$，由(3.20)的第一式，有

$$
\alpha_{2\,m_2-1} = 1, \quad \alpha_{3\,m_3-1} = 1.
$$

对 $i = 2,3$，按(3.19)的第一式，计算 $k = 2$ 时的情形. 记

$$
K_1 = \begin{bmatrix}
k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\
k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\
k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\
k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1
\end{bmatrix}.
$$

则有

$$
(k_{43}^1 \quad k_{42}^1 \quad k_{41}^1 =)0. \qquad (4.3)
$$

这时分两种情形讨论：

i) 当约束(4.3)不满足时,有 $m_2=2, m_3=2$. 这时,按(3.19)的第二式计算得

$$\begin{cases}(1-h_{11} \quad -h_{12} \quad -h_{13})=0,\\ (k_{43}^1-h_{21} \quad k_{42}^1-h_{22} \quad k_{41}^1-h_{23})=0,\\ (k_{43}^1-h_{31} \quad k_{42}^1-h_{32} \quad k_{41}^1-h_{33})=0.\end{cases} \tag{4.4}$$

这里,记

$$H_1^{-1}=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{bmatrix}.$$

为使约束(4.4)满足,必须有

$$h_{21}=h_{31}, \quad h_{22}=h_{32}, \quad h_{23}=h_{33}.$$

但它与 H_1^{-1} 的非异性矛盾. 因此情形 i)不能发生. 从而必有

ii)
$$k_{41}^1=k_{42}^1=k_{43}^1=0. \tag{4.5}$$

这时,由(3.20)的第一式的 $k=2$, 可得

$$\alpha_{2\,m_2-2}=k_{44}^1, \quad \alpha_{3\,m_3-2}=k_{44}^1,$$

且 $m_2 \geqslant 3, m_3 \geqslant 3$.

继续考察约束(3.19)的第一式 $k=3$ 时 $i=2,3$ 的情形,得

$$(k_{43}^2 \quad k_{42}^2 \quad k_{41}^2)=0. \tag{4.6}$$

这里, $k_{4i}^2 (i=1,2,3)$ 是 K_2 阵第 4 行的三个元.

与上面相类似,先讨论约束(4.6)式不成立时的情形,这时, $m_2=3, m_3=3$. 考察(3.19)的第二式,对 $i=2$ 及 3 时可得

$$(k_{43}^2-h_{i1} \quad k_{42}^2-h_{i2} \quad k_{41}^2-h_{i3})=0, \quad i=2,3.$$

为使上式成立,又得到与 H_1^{-1} 非异矛盾的结论. 因此,(4.6) 成立. 这时, $m_2 \geqslant 4, m_3 \geqslant 4$ 且

$$\alpha_{2\,m_2-3}=\alpha_{3\,m_3-3}=(k_{44}^1)^2.$$

由此,再考察(3.19)的第一式 $k=4$ 时的情形,这时,注意到 $c_{24}=0$, $c_{34}=1$. 所以,得约束

$$\begin{cases}(0 \quad 0 \quad k_{41}^3)=0,\\ (0 \quad 0 \quad 1+k_{41}^3)=0.\end{cases} \tag{4.7}$$

又再考虑到约束(3.7)式,这时必须(4.7)式不成立.

$$m_2=m_3=4,$$
$$\begin{cases}k_{41}^3 \neq 0,\\ k_{41}^3 \neq -1.\end{cases} \tag{4.8}$$

这时,考察(3.19)的第二式,可得约束

$$(-h_{21} \quad -h_{22} \quad k_{41}^3-h_{23})=0,$$
$$(-h_{31} \quad -h_{32} \quad 1+k_{41}^3-h_{33})=0.$$

即必有
$$h_{21}=h_{22}=h_{31}=h_{32}=0.$$

与 H_1^{-1} 的非异性矛盾.

因而该系统的 MP 无解.

5 结　论

本文讨论非方系统的解耦问题. 当该系统确定的 D 阵不行满秩时,由定理 3.1 明确地

表示出欲实现输出与输入的"一一对应"时可舍去的多余的输入分量，这时为实现"解耦"而仍须考虑到它们的状态反馈.

定理 3.3 则用构造性方法给出了 MP 有解时必须且仅需满足的约束关系式(3.14)～(3.16). 特别地，当满足(3.18)式时，用定理 3.5 给出了可实现具体计算的(3.19)，(3.20)等约束. 通过例 4.1 给出了讨论各种情形的具体过程.

参考文献

[1] Morgan, B. S.. The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State Feedback. JACC, 1964, 468—472

[2] Falb, P. L. & Wolovich, W. A.. Decoupling and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, AC-12: 651—669

[3] Wonham, W. M. & Morse, A. S.. Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometic Approach. SIAM J. Control, 1970, 8: 1—18

[4] Wolovich, W. A.. Linear Multivariable Systems. Springer-Verlag, New York, 1974. 296

[5] Suda, M. & Umahashi, K.. Decoupling of Nonsquare Systems——A Necessary and Sufficient Condition in Terms of Infinite Zeros. Preprints 9th IFAC World Con., Budapest, Hungary, July, 1984, 8: 88—93

[6] Descusse, J., Lafay, J. F. & Malabre, M.. Solution to Morgan's Problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33, 732—739

[7] G Lumineau, A. & Moog, C. H.. Nonlinear Morgan's Problem: Case of $(p+1)$ Inputs and p Outputs. IEEE Automat. Contr., 1992, AC-37: 1067—1072

[8] 陈树中. Morgan 问题：输入数＝输出数＋1 情形. 自动化学报，1993，19(5)：520—526

[9] 陈树中. 系统解耦的传递函数条件. 控制理论与应用，1994，11(2)：203—206

[10] Yokoyama, R. & Kinner, E.. Phase-Variable Cononical Forms for Multi-Input, Multi-Output Systems. Int. J. Control, 1973, 17: 1297—1312

[11] 韩京清. 线性系统的结构与反馈系统计算. 全国控制理论及其应用学术交流会论文集. 北京：科学出版社，1981，43—55

[12] 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳：辽宁科学技术出版社，1985，261—262

Morgan's Problem of Non-Quadrant Systems

XU Kekang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: In this paper the Morgan's problem (MP) of non-quadrant systems is discussed. Noticing the characteristics of MP and with the help of Yokoyama-Han canonical form, we obtain a set of constraints which are needed essentically and only if there is a solution in MP. For a particalar kind of MP in non-quadrant systems this set of constraints have a good picture of calculating possibility.

Key works: Morgan's problem; non-quadrant systems

本文作者简介

许可康　见本刊 1995 年第 3 期第 362 页.