第 12 卷第 5 期　　控制理论与应用　　Vol. 12, No. 5
1995 年 10 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Oct., 1995

一类组合系统的结构固定模的特征*

杨光红　张嗣瀛
（东北大学自动控制系·沈阳，110006）

摘要：本文讨论了一类组合系统，它由若干个具有相同结构的子系统和一个外部系统通过对称地内联所组成，证明了这类系统的结构分散固定模的存在性可由结构简单的系统所决定.

关键词：组合系统；分散控制；结构固定模

1 引　言

在许多自然发展和形成的系统(如社会系统、管理系统、生物系统等)以及实际的工程系统(如电力系统、机器人系统、计算机网络等)中，人们经常可以看到一个基本的结构特征：就是这些系统的一些子系统的结构及其内联块的结构常常是相同的，并且整个系统的内联方式是对称的. 关于具有这一结构特征的一些具体实例参见文[1～4]. 特别，近来一些作者讨论的由若干个相同的子系统组成的对称组合系统也具有上面的结构特征[5,6]. 本文给出了这类系统的数学描述，并且研究了这类系统的结构分散固定模的特征.

2 系统的描述

在本文中，$\overline{M}$ 表示与矩阵 M 对应的结构矩阵. $r(\overline{M})$ 表示矩阵 $\overline{M}$ 的一般秩. $\widetilde{M} \triangleq \{M' :$ M' 与 M 是结构等价的$\}$. $\overline{M}_1 + \overline{M}_2$ 表示两个具有相同尺寸的结构矩阵 $\overline{M}_1$ 与 $\overline{M}_2$ 之和，定义为：在 M_1 或 M_2 非零元素的位置上，$\overline{M}_1 + \overline{M}_2$ 的元素是任意的；在其它的位置上，$\overline{M}_1 + \overline{M}_2$ 的元素是零. 关于结构矩阵、结构等价和结构系统等相关的概念参见文[7]. 下面给出本文所讨论的系统的数学描述.

考虑由 N 个具有相同结构的子系统 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_N (N > 1)$ 和一个外部系统 Σ_0 所组成的系统 Σ，其状态方程为：

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} H_{ij} x_j(t) + B_i u_i(t). \tag{2.1a}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t), \quad i = 0, 1, \cdots, N. \tag{2.1b}$$

这里 $x_0(t) \in \mathrm{R}^{n_0}$, $u_0(t) \in \mathrm{R}^{r_0}$ 和 $y_0(t) \in \mathrm{R}^{p_0}$ 分别是系统 Σ_0 的状态，输入和输出，$x_i(t) \in \mathrm{R}^n$，$u_i(t) \in \mathrm{R}^r$ 和 $y_i(t) \in \mathrm{R}^p$ 分别是系统 $\Sigma_i (i = 1, \cdots, N)$ 的状态，输入和输出，且 $A_i \in \widetilde{A}_1$, $B_i \in \widetilde{B}_1$, $C_i \in \widetilde{C}_1$, $H_{oi} \in \widetilde{L}_0$ 及 $H_{io} \in \widetilde{M}_0 (i = 1, \cdots, N)$, $H_{ij} \in \widetilde{H}_1 (i, j = 1, \cdots, N; i \neq j)$，其中 L_0，M_0 和 H_1 都是给定的常数矩阵.

系统(2.1)可以结构等价地由下面的组合方程描述：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t). \tag{2.2}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1993 年 5 月 31 日收到. 1994 年 12 月 8 日收到修改稿.

这里 $x(t) = [x_0^{\mathrm{T}}(t)\ x_1^{\mathrm{T}}(t)\ \cdots\ x_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}, u(t) = [u_0^{\mathrm{T}}(t)\ u_1^{\mathrm{T}}(t)\ \cdots\ u_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$ 及 $y(t) = [y_0^{\mathrm{T}}(t)\ y_1^{\mathrm{T}}(t)\ \cdots\ y_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，并且组合矩阵 $A \in \mathrm{R}^{(n_0+Nn)\times(n_0+Nn)}, B \in \mathrm{R}^{(n_0+Nn)\times(r_0+Nr)}$ 及 $C \in \mathrm{R}^{(p_0+Np)\times(n_0+Nn)}$ 具有下面的结构

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_0 & \overline{L}_0 & \overline{L}_0 & \cdots & \overline{L}_0 \\ \overline{M}_0 & \overline{A}_1 & \overline{H}_1 & \cdots & \overline{H}_1 \\ \overline{M}_0 & \overline{H}_1 & \overline{A}_1 & \cdots & \overline{H}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{M}_0 & \overline{H}_1 & \overline{H}_1 & \cdots & \overline{A}_1 \end{bmatrix}, \tag{2.3a}$$

$$\overline{B} = \text{block-diag}[\overline{B}_0\quad \overline{B}_1\quad \cdots\quad \overline{B}_1], \tag{2.3b}$$

$$\overline{C} = \text{block-diag}[\overline{C}_0\quad \overline{C}_0\quad \overline{C}_1\quad \cdots\quad \overline{C}_1]. \tag{2.3c}$$

应该指出，人们可以在非常广泛的领域里找到一些建模研究，它们都导致由方程(2.1)或(2.2)所描述的状态模型，详见文[1～6]. 下一节，我们将考察由方程(2.1)或(2.2)所描述的系统 Σ 的结构分散固定模的特征.

3　结构固定模的特征

对于由方程(2.1)或(2.2)描述的系统 Σ，定义系统 $\Sigma_d = \{\overline{A}_d, \overline{B}_d, \overline{C}_d\}$ 和系统 $\Sigma_s = \{\overline{A}_s, \overline{B}_s, \overline{C}_s\}$ 如下：

$$\overline{A}_d = \begin{bmatrix} \overline{A}_0 & \overline{L}_0 & \overline{L}_0 & \cdots & \overline{L}_0 \\ \overline{M}_0 & \overline{A}_1 + \overline{H}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{M}_0 & 0 & \overline{A}_1 + \overline{H}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{M}_0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{A}_1 + \overline{H}_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_d = \overline{B},\quad \overline{C}_d = \overline{C}, \tag{3.1}$$

$$\overline{A}_s = \begin{bmatrix} \overline{A}_0 & \overline{L}_0 \\ \overline{M}_0 & \overline{A}_1 + \overline{H}_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_s = \begin{bmatrix} \overline{B}_0 & 0 \\ 0 & \overline{B}_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{C}_s = \begin{bmatrix} \overline{C}_0 & 0 \\ 0 & \overline{C}_1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

则关于系统 Σ 的结构分散固定模[8]具有下面的特征.

定理 3.1　系统 Σ 关于分散反馈控制

$$u_i(t) = K_i y_i(t),\quad i = 0,1,\cdots,N, \tag{3.3}$$

(这里 $K_0 \in \widetilde{F}_0, K_i \in \widetilde{F}_1, (i = 1,\cdots,N)$，且结构矩阵 $\overline{F}_0 \in \mathrm{R}^{r_0\times p_0}$ 和 $\overline{F}_1 \in \mathrm{R}^{r\times p}$ 分别有 $r_0 p_0$ 和 rp 个任意元素)，没有结构固定模的充分且必要条件为系统 Σ_d 关于分散反馈控制(3.3)没有结构固定模.

推论 3.1　如果系统 Σ 不含有外部系统 Σ_0，即在方程(2.1)中，$n_0 = r_0 = p_0 = 0$，那末系统 Σ 关于分散反馈控制(3.3)没有结构固定模的充分且必要条件为系统 $\{\overline{A}_1 + \overline{H}_1, \overline{B}_1, \overline{C}_1\}$ 是结构能控与能观的.

为了给出系统 Σ 关于分散反馈控制(3.3)的结构固定模的图理论特征，考虑矩阵

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{F} \\ \overline{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\overline{d}_{ij}),\quad \overline{D}_d = \begin{bmatrix} \overline{A}_d & \overline{B} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{F} \\ \overline{C} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \overline{D}_s = \begin{bmatrix} \overline{A}_s & \overline{B}_s & 0 \\ 0 & 0 & \overline{F}_s \\ \overline{C}_s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中，$\overline{F} = \text{block-diag}[\overline{F}_0\ \overline{F}_1\ \cdots\ \overline{F}_1] \in \mathrm{R}^{(r_0+Nr)\times(p_0+Np)}, \overline{F}_s = \text{block-diag}[\overline{F}_0\ \overline{F}_1]$ 则 $\overline{D}$ 可决定

一个有向图 $G=(V,E)$,G 的顶点的集合 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n_0+r_0+p_0+N(n+r+p)}\}=X\cup U\cup Y$,其中 $X=\{x_0^1,\cdots,x_0^{n_0};x_1^1,\cdots,x_1^n;\cdots;x_N^1,\cdots,x_N^n\}$,$U=\{u_0^1,\cdots,u_0^{r_0};u_1^1,\cdots,u_1^r;\cdots,u_N^1,\cdots,u_N^r\}$ 和 $Y=\{y_0^1,\cdots,y_0^{p_0};y_1^1,\cdots,y_1^p;\cdots;y_N^1,\cdots,y_N^p\}$ 分别是系统 $\Sigma=\{\overline{A},\overline{B},\overline{C}\}$ 的状态结点,输入结点和输出结点的集合,G 的有向边集合 E 定义为:$(v_j,v_i)\in E\Leftrightarrow\overline{d}_{ij}$ 非零,并且用 $v_j\rightarrow v_i$ 表示 $(v_j,v_i)\in E$. 图 G 中与 $\overline{F}$ 对应的反馈边的集合记为 E_F. 类似地,由矩阵 $\overline{D}_d$ 和 $\overline{D}_s$ 决定的对应于系统 $\Sigma_d=\{\overline{A}_d,\overline{B},\overline{C}\}$ 与 $\Sigma_s=\{\overline{A}_s,\overline{B}_s,\overline{C}_s\}$ 的有向图分别记为 $G_d=(V_d,E_d)$ 和 $G_s=(V_s,E_s)$,这里 $V_d=X_d\cup U_d\cup Y_d$,$V_s=X_s\cup U_s\cup Y_s$,其中 $X_s=[x_{01},\cdots,x_{0n_0};x_{11},\cdots,x_{1n}\}$,$U_s=\{u_{01},\cdots,u_{0r_0};u_{11},\cdots,u_{1r}\}$ 和 $Y_s=\{y_{01},\cdots,y_{0p_0};y_{11},\cdots,y_{1p}\}$ 分别是系统 Σ_s 的状态结点、输入结点和输出结点的集合. 图 G_s 中与 $\overline{F}_s$ 对应的反馈边的集合记为 E_{F_s}. G 和 G_s 的子图 G_0 和 G_{s0} 分别定义为:$G_0=(V,E-E_F)$,$G_{s0}=(V_s,E_s-E_{F_s})$. 在一个有向图中 $v_i\xrightarrow{R}v_j$ 表示顶点 v_j 可由 v_i 到达. 关于有向图的相关概念参见文[9].

定理 3.2 系统 Σ 关于分散反馈控制(3.3)没有结构固定模的充分且必要条件为下面两个条件成立:

1) 在图 G_s 中,存在强支 $G_{sk}=(V_{sk},E_{sk})$ $(k=1,\cdots,t)$ 使得 $X_s\subset\bigcup_{k=1}^{t}V_{sk}$ 且 $E_{sk}\cap E_{F_s}\neq\varnothing$,$(k=1,\cdots,t)$;

2) 在图 G_d 中,存在互不相交的圈 $G_{dk}=(V_{dk},E_{dk})$ $(k=1,\cdots,t_1)$ 使得 $X_d\subset\bigcup_{k=1}^{t_1}V_{dk}$,或等价地

$$r\left(\begin{bmatrix}\overline{A}_d & \overline{B} & 0\\ 0 & \overline{I}_{r_0}+Nr & \overline{F}\\ \overline{C} & 0 & \overline{I}_{p_0+Np}\end{bmatrix}\right)=n_0+r_0+p_0+N(n+r+p).$$

这里 $I_{r_0}+Nr$ 和 $I_{p_0}+Np$ 分别为 $(r_0+Nr)\times(r_0+Nr)$ 和 $(p_0+Np)\times(p_0+Np)$ 单位矩阵.

定理 3.1 和定理 3.2 可由文[10]和[11]中的相应结果推出,证明从略.

注 3.1 从定理 3.1 可以看出,关于系统 Σ 的结构分散固定模的存在性可由结构简单的系统 Σ_d 所决定. 特别,当系统 Σ 不含有外部系统时,其结构分散固定模的存在性由修正的子系统 $\{\overline{A}_1+\overline{H}_1,\overline{B}_1,\overline{C}_1\}$ 的结构能控性与结构能观性所决定. 定理 3.2 给出了系统 Σ 的结构分散固定模的图理论特征,并且这一特征分别由低阶系统 Σ_s 与系统 Σ_d 的有向图的相应性质所刻画. 这些结果也极大地简化了关于整个系统 Σ 的结构分散固定模的存在性的检验.

4 结 论

本文利用系统的具体结构特征研究了一类组合系统的结构分散固定模的存在性问题,这类系统由若干个具有相同结构的子系统和一个外部系统通过对称地内联所组成,证明了这类系统的结构分散固定模的存在性可由结构简单的系统所决定.

参 考 文 献

[1] Araujo, C. S. and Castro, J. C.. Application of Power System Stabilisers in a Plant with Identical Units. IEE Proc.

Part C, 1991, 138: 11—18

[2] Bakule, L. and Lunze, J.. Decentralized Design of Feedback Control for Large-Scale Systems. Kybernetika, 1988, 24: 1—100

[3] Castro, J. C. and Araujo, C. S.. Decentralized Control of Systems with Groups of Similar Subsystems and Symmetrical Interconnections. IFAC/IFORS/IMACS Symposium LSS: Theory and Application, Beijing, 1992, 90—95

[4] Mohadjer, M. and Johnson, C. D.. Power System Control with Disturbance Accommodation. Proc. 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, 1983, 1429—1433

[5] Lunze, J.. Stability Analysis of Large-Scale Systems Composed of Strongly Connected Similar Subsystems. Automatica, 1989, 25: 561—570

[6] Sundareshan, M. K. and Elbanna, R. M.. Oualitative Analysis and Decentralized Controller Synthesis for a Class of Large-Scale Systems with Symmetrically Interconnected Subsystems. Automatica, 1991, 27: 383—388

[7] Shields, R. W. and Pearson, J. B.. Structural Controllability of Multi-Input Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21: 203—212

[8] Sezer, M. E. and Siljak, D. D.. Structurally Fixed Modes. Systems Control Lett., 1981, 1: 60—64

[9] Harary, F., Norman, R. Z. and Cartwright, D.. Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. John Wiley, New York: 1965

[10] Pichai, V., Sezer, M. E. and Siljak, D. D.. A Graph-Theoretic Characterization of Structurally Fixed Modes. Automatica, 1984, 20: 247—250

[11] Siljak, D. D.. Decentralized Control of Complex Systems. Academic Press, San Diego, 1991

The Characteristics of Structurally Fixed Modes for A Class of Composite Systems

YANG Guanghong and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: This paper discusses a class of composite systems, which are composed of several subsystems with identical structure interconnected with an external system in a symmetrical fashion. It is shown that the existence of structurally decentralized fixed modes for this class of systems can be determined by the systems with simple structures.

Key words: composite systems; decentralized control; structurally fixed modes

本文作者简介

杨光红 1963 年生. 分别于 1983 年和 1986 年在东北工学院数学系获学士和硕士学位，于 1994 年在东北大学自动控制系获博士学位，现任东北大学自动控制系副教授. 目前主要从事非线性控制、鲁棒控制和复杂控制系统的结构等方面的研究.

张嗣瀛 见本刊 1995 年第 2 期第 254 页.