

## 含有不确定因素的模型检验及其非伪概率估计\*

周 彤

(北京航空航天大学第七研究室·北京, 100083)

**摘要:** 本文研究了在控制对象的模型具有不确定的建模误差时的模型检验问题, 并给出了控制对象的模型不能被实验数据所否定的概率的估计.

**关键词:** 模型检验; 鲁棒控制; 建模误差; 模型非伪概率

### 1 引 言

模型检验 (Model validation/Model invalidation) 是建模过程中的一个重要步骤, 其作用在经典的建模理论中就已得到了广泛的认识<sup>[1]</sup>. 由于模型根据其使用的目的不同而具有不同的形式, 在模型检验中也存在着许多种方法. 当模型的使用目的为鲁棒控制器设计时, R. Smith 和 J. C. Doyle 研究了当控制对象的频域输入输出数据给定时的模型检验问题, 并将其转化为一个  $\mu$  分析 ( $\mu$ -analysis) 问题<sup>[2]</sup>. 当控制对象的输入输出数据是以时域的形式给出时, 这一模型检验问题与一外推问题有着紧密的联系, 并可以转化为一个凸函数的最小化问题<sup>[3,4]</sup>. 这一结论是 K. Poolla 等与 T. Zhou 和 H. Kimura 几乎同时独立地得到的.

在模型检验问题中, 当模型是为鲁棒控制器的设计服务时, 无论是根据控制对象的频域输入输出数据, 还是根据控制对象的时域输入输出数据, 所采用的方法都是确定性的方法 (Deterministic approach), 这主要是因为鲁棒控制器设计中所采用的方法就是确定性的方法. 但众所周知, 在进行控制对象的输入输出特性测量时, 往往存在着许多干扰, 而这些干扰通常不是确定性的, 而是随机性的. 因此, 尽管在鲁棒控制系统设计时采用的方法是确定性的, 讨论控制对象的模型不被系统辨识实验数据所否定的概率的分布特性仍然具有重要的意义. 因为只有根据这一概率分布特性, 才能对控制对象的模型的置信水平作出区间估计.

本文研究怎样从控制对象在系统辨识实验中存在的干扰的统计特性推导其模型的置信水平的区间估计问题. 首先, 在第二节, 我们提出问题并简要地讨论其控制工程背景; 在第三节, 我们根据 Toeplitz 矩阵的最大奇值的摄动特性来求取控制对象的模型不能被实验数据所否定的概率的估计; 最后, 我们用第四节来结束本文.

符号:  $E[x]$ : 随机变数  $x$  的数学期望;  $D[x]$ : 随机变数  $x$  的方差;  $P\{x \leq \alpha\}$ : 随机变数  $x$  取值不超过  $\alpha$  的概率;  $I_n$ :  $n \times n$  维单位矩阵;  $\bar{\sigma}(X)$ : 矩阵  $X$  的最大奇值;  $X'$ : 矩阵  $X$  的转置;  $\text{tr}\{X\}$ : 矩阵  $X$  的迹;  $\|H(z)\|_\infty$ : 传递函数  $H(s)$  的  $H_\infty$  范数.

\* 国家自然科学基金 (69474004) 和国家教育委员会回国人员科研资助费资助项目.

本文于 1994 年 12 月 8 日收到, 1995 年 8 月 5 日收到修改稿.

## 2 模型检验问题

对于线性时不变系统的适合于鲁棒控制器设计的模型,其检验问题是回答下面的问题:在由给定的控制对象的名义模型(Nominal model)及其误差的上限所决定的传递函数集合中,是否可以找到一个传递函数来解释观测到的控制对象的输入输出数据.如果这个回答是肯定的,那么,我们称控制对象的这个模型没有被否定,或者说是非伪的(Unfalsified);否则,我们称控制对象的模型是不正确的,或者说是被否定了<sup>[2~4]</sup>.

为了简洁地叙述结论,在本文中,我们仅仅讨论单输入单输出控制对象的模型检验问题.然而,其结论可以推广至一般的多输入多输出系统.

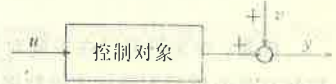


图1 系统辨识实验

在鲁棒控制器的设计过程中,控制对象的输入输出特性通常是由一个名义模型与其加法误差的上限,或一个名义模型与其乘法误差的上限,或一个名义模型与其线性分式误差的上限等来描述的<sup>[5]</sup>.本文只讨论当控制对象的输入输出特性是由一个名义模型与其加法误差的上限来描述时的模型检验问题.其结论和推导过程可以推广到其它形式.

在控制对象名义模型的误差以加法形式出现时,其输入输出特性满足下述关系:

$$y(z) = \left[ \frac{b(z)}{a(z)} + \frac{d(z)}{c(z)} \Delta(z) \right] u(z) + v(z), \quad \|\Delta(z)\|_\infty \leq 1. \quad (1)$$

这里,  $\frac{b(z)}{a(z)}$  为控制对象的名义模型,  $\frac{d(z)}{c(z)}$  代表该名义模型的误差限的频率特性. 假设

$$\begin{aligned} a(z) &= z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m, & b(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m, \\ c(z) &= z^w + c_1 z^{w-1} + \dots + c_w, & d(z) &= d_0 z^w + d_1 z^{w-1} + \dots + d_w, \end{aligned}$$

且  $d_0 \neq 0$ .

另一方面,设通过系统辨识实验,测得控制对象的时域输入输出数据为  $(u_i, y_i) |_{i=0}^n$ .

令

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & d_{n-1} & \dots & d_0 \end{bmatrix}, \\ U &= \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n-1} & \dots & u_0 \end{bmatrix}, & Y &= \begin{bmatrix} y_0 & 0 & \dots & 0 \\ y_1 & y_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n-1} & \cdots & v_0 \end{bmatrix}$$

这里

$$a_i = b_i = 0, \quad i > m; \quad c_i = d_i = 0, \quad i > n.$$

当  $u_0 \neq 0$  时, 根据输入输出最小外推定理和 Toeplitz 矩阵乘法的可交换性, 可以得到下面的结论<sup>[3,4]</sup>.

**引理 1** 设  $u_0 \neq 0$ , 控制对象的模型  $G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} + \frac{d(z)}{c(z)}\Delta(z)$ ,  $\|\Delta(z)\|_\infty < 1$ , 不被其测得的系统辨识实验数据  $(u_i, y_i) |_{i=0}^n$  所否定的充分必要条件是

$$\bar{\sigma}((Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1}) < 1.$$

从引理 1 知, 当系统辨识实验数据中存在噪声时(通常是这样的), 研究  $\sigma((Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1})$  的概率分布对模型检验有着十分重要的意义. 因为根据这一概率分布, 可以确定控制对象的模型被系统辨识实验数据所否定的可能性的大小, 也即该模型的置信水平的区间估计, 或者说是控制对象模型的非伪概率.

值得指出的是,  $\frac{d(z)}{c(z)}$  是用于表示控制对象的名义模型的误差的大小, 同时, 控制对象一般是因果系统. 因此, 假设  $d_0 \neq 0$  和  $u_0 \neq 0$  将不会使要讨论的问题失去一般性<sup>[2-1]</sup>.

为了研究  $\bar{\sigma}((Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1})$  的概率分布, 一般来讲, 前提条件是噪声  $\{v_i\}$  的概率分布为已知. 通常, 这一分布是难于得到的, 但是, 我们常常可以通过实验的方法来得到噪声  $\{v_i\}$  的数字特征, 如它的数学期望与方差等.

本文将研究下面的问题.

设噪声  $\{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$  为独立的弱平稳随机过程, 且设  $E[v_i] = E_v$ ,  $D[v_i] = D_v$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . 求矩阵  $(Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1}$  的最大奇值小于 1 的概率.

### 3 控制对象模型的非伪概率估计

为了得到  $\bar{\sigma}((Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1}) < 1$  的概率, 也即控制对象模型的非伪概率, 首先, 我们研究矩阵  $(Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1}$  的最大奇值的数学期望和方差. 为了避免繁琐的数学表达式, 我们令

$$\bar{Y} = Y - BA^{-1}U, \quad (2)$$

$$\bar{U} = DC^{-1}U. \quad (3)$$

则根据 Toeplitz 矩阵的特性可知, 矩阵  $\bar{U}, \bar{Y}$  依然是 Toeplitz 矩阵.

值得指出的是, 矩阵的奇值摄动问题是一个比较困难的问题, 一般难于得到矩阵的摄动与其奇值的摄动之间的解析关系式<sup>[6]</sup>. 对于 Toeplitz 矩阵而言, 尽管其具有比较特殊的结构, 这一摄动问题也并不因此而减小了难度<sup>[7]</sup>. 为了得到矩阵  $(Y - BA^{-1}U - V)(DC^{-1}U)^{-1}$  的最大奇值小于 1 的概率, 一个比较合理的方法是先估计这一矩阵的最大奇值的数学期望和方差的上限和下限, 然后据此对其概率进行估计.

记  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ , 且令  $T^m = I_{n+1}$ , 则我们有下面的定理.

**定理 1**  $E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \leq \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1}) + (D_v + E_v^2)^{1/2} \sum_{i=0}^n \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1})$ .

证 根据定义,有

$$V = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n-1} & \cdots & v_0 \end{bmatrix} = v_0 T^0 + v_1 T + v_2 T^2 + \cdots + v_n T^n = \sum_{i=0}^n v_i T^i. \quad (4)$$

于是

$$\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) = \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1} - \sum_{i=0}^n v_i T^i \bar{U}^{-1}) \leq \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1}) + \sum_{i=0}^n |v_i| \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1}). \quad (5)$$

故

$$\begin{aligned} E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] &\leq E[\bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1})] + E\left[\sum_{i=0}^n |v_i| \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1})\right] \\ &= \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1}) + E[|v_0|] \sum_{i=0}^n \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

设  $v_0$  的概率分布函数为  $P\{v_0 \leq x\} = F(x)$ , 则

$$E[|v_0|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x). \quad (7)$$

由 Schwarz 不等式,有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot 1 \cdot dF(x) \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dF(x)\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} 1^2 \cdot dF(x)\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dF(x)\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

另一方面,由  $D_v = D[v_0] = E[v_0^2] - E_v^2$ , 知

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = E[v_0^2] = D_v + E_v^2. \quad (9)$$

故

$$E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \leq \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1}) + (D_v + E_v^2)^{1/2} \sum_{i=0}^n \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1}). \quad (10)$$

证毕.

下面,我们讨论  $\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})$  的数学期望的下限.

**定理 2** 令

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \geq \bar{\sigma}((\bar{Y} - E_v M)\bar{U}^{-1}).$$

证 为了讨论方便,令

$$\lambda = \bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}), \quad (11)$$

则根据定义有

$$\begin{aligned} \lambda^2 I &\geq [(\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}]' [(\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}] \\ &= \bar{U}' (\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V) \bar{U}^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

即

$$\lambda^2 \bar{U}' \bar{U} \geq (\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V), \quad (13)$$

从而

$$\begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & (\bar{Y} - V)' \\ (\bar{Y} - V) & \lambda \bar{U}' \bar{U} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (14)$$

于是

$$E \left[ \begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & (\bar{Y} - V)' \\ (\bar{Y} - V) & \lambda \bar{U}' \bar{U} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} E[\lambda] I_{n+1} & \bar{Y}' - E[V]' \\ \bar{Y} - E[V] & E[\lambda] \bar{U}' \bar{U} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

另一方面

$$E[V] = \begin{bmatrix} E[v_0] & 0 & \cdots & 0 \\ E[v_1] & E[v_0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[v_n] & E[v_{n-1}] & \cdots & E[v_0] \end{bmatrix} = E_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E_v M, \quad (16)$$

$$E[V'] = E'[V] = E_v M'. \quad (17)$$

从而, 我们得到

$$\begin{bmatrix} E[\lambda] I_{n+1} & \bar{Y}' - E_v M' \\ \bar{Y} - E_v M & E[\lambda] \bar{U}' \bar{U} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (18)$$

故

$$E^2[\lambda] \bar{U}' \bar{U} - (\bar{Y} - E_v M)' (\bar{Y} - E_v M) \geq 0. \quad (19)$$

于是

$$E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \geq \bar{\sigma}((\bar{Y} - E_v M)\bar{U}^{-1}). \quad (20)$$

证毕.

为了得到矩阵  $(\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}$  的最大奇值的方差的上限, 我们首先讨论  $E[\sigma^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]$  的上限.

**定理 3** 令  $N = \text{diag}\{n+1, n, \dots, 1\}$ , 则

$$E[\sigma^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \leq \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v \bar{Y}' M - E_v M' \bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\}.$$

证 记矩阵  $(\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}$  的奇值为  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ , 且按非递增顺序排列. 即  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+1} \geq 0$ .

则

$$\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) = \lambda_1, \quad (21)$$

由

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{n+1}^2 = \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V) \bar{U}^{-1}\}, \quad (22)$$

有

$$\bar{\sigma}^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) = \lambda_1^2 \leq \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V) \bar{U}^{-1}\}. \quad (23)$$

于是

$$\begin{aligned} E[\sigma^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] &\leq E[\text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V) \bar{U}^{-1}\}] \\ &= \text{tr}\{E[\bar{U}^{-1}(\bar{Y} - V)' (\bar{Y} - V) \bar{U}^{-1}]\} \\ &= \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E[\bar{Y}'V] - E[V'\bar{Y}] + E[V'V])\bar{U}^{-1}\} \end{aligned}$$

$$= \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_nM'\bar{Y} + E[V'V])\bar{U}^{-1}\}, \quad (24)$$

另一方面,

$$V'V = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n-1} & \cdots & v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n-1} & \cdots & v_0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n v_i^2 & \sum_{i=0}^{n-1} v_i v_{i+1} & \cdots & v_0 v_n \\ \sum_{i=0}^{n-1} v_i v_{i+1} & \sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 & \cdots & v_0 v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0 v_n & v_0 v_{n-1} & \cdots & v_0^2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

于是

$$E[V'V] = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n E[v_i^2] & \sum_{i=0}^{n-1} E[v_i v_{i+1}] & \cdots & E[v_0 v_n] \\ \sum_{i=0}^{n-1} E[v_i v_{i+1}] & \sum_{i=0}^{n-1} E[v_i^2] & \cdots & E[v_0 v_{n-1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[v_0 v_n] & E[v_0 v_{n-1}] & \cdots & E[v_0^2] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (n+1)E[v_0^2] & & & \\ & nE[v_0^2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & E[v_0^2] \end{bmatrix} \\ = (D_v + E_v^2)N. \quad (26)$$

故

$$E[\bar{\sigma}^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \leq \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_nM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\}. \quad (27)$$

证毕.

根据定理 2 和定理 3 的结论, 可以很容易地得到下面的推论.

### 推论 1

$$D[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \\ \leq \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_nM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\} - \bar{\sigma}^2((\bar{Y} - E_nM)\bar{U}^{-1}).$$

证 这一关系可由

$$D[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] = E[\bar{\sigma}^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] - E^2[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \quad (28)$$

得到. 证毕.

现在来讨论  $\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) < 1$  的概率.

令

$$E_{\sigma}^{up} = \bar{\sigma}(\bar{Y}\bar{U}^{-1}) + (D_v + E_v^2)^{1/2} \sum_{i=0}^n \bar{\sigma}(T^i \bar{U}^{-1}), \quad (29)$$

$$D_{\sigma}^{up} = \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_vM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\} - \bar{\sigma}^2((\bar{Y} - E_vM)\bar{U}^{-1}). \quad (30)$$

若  $E_{\sigma}^{up} < 1$ , 则根据车贝谢夫不等式<sup>[8]</sup>, 有

$$\begin{aligned} & P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 1\} \\ &= P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) - E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})] \geq 1 - E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]\} \\ &\leq P\{|\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) - E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]| \geq 1 - E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]\} \\ &\leq P\{|\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) - E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]| \geq 1 - E_{\sigma}^{up}\} \\ &\leq \frac{D[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]}{(1 - E_{\sigma}^{up})^2} \leq \frac{D_{\sigma}^{up}}{(1 - E_{\sigma}^{up})^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

因此,

$$\begin{aligned} P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) < 1\} &= 1 - P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 1\} \\ &\geq 1 - \frac{D_{\sigma}^{up}}{(1 - E_{\sigma}^{up})^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

另一方面, 由于  $\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 0$ , 根据原点绝对矩与概率的关系<sup>[8]</sup>, 有

$$P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 1\} \leq \frac{E[\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]}{1} \leq E_{\sigma}^{up}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 1\} &\leq \frac{E[\bar{\sigma}^2((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1})]}{1^2} \\ &\leq \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_vM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\}. \end{aligned} \quad (34)$$

因此

$$\begin{aligned} & P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) < 1\} \\ &= 1 - P\{\bar{\sigma}((\bar{Y} - V)\bar{U}^{-1}) \geq 1\} \\ &\geq \max\{1 - E_{\sigma}^{up}, 1 - \text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_vM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\}\}. \end{aligned} \quad (35)$$

综上所述, 我们得到下面的结论.

**定理 4** 当控制对象的名义模型的误差以加法形式表现时, 系统辨识实验数据  $(u_i, y_i) |_{i=0}^n$  不能否定控制对象的模型的概率不小于

$$1 - \min\left\{\text{tr}\{\bar{U}^{-1}(\bar{Y}'\bar{Y} - E_v\bar{Y}'M - E_vM'\bar{Y} + (D_v + E_v^2)N)\bar{U}^{-1}\}, \frac{D_{\sigma}^{up}}{(1 - E_{\sigma}^{up})^2}, E_{\sigma}^{up}\right\}.$$

## 4 结束语

本文研究了控制对象的名义模型具有有界的加法不确定建模误差时的模型检验问题, 并根据系统辨识实验中的噪声的数字特征给出了一个控制对象的模型不能被实验数据所否定的概率的下限. 其结果可以推广到多输入多输出控制对象和其它形式的建模误差, 如乘法形式、线性分式形式等.

## 参 考 文 献

- [1] Ljung, L., System Identification, Theory for the User. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1987
- [2] Smith, R. S. and Doyle, J. C., Model Validation: A Connection between Robust Control and Identification. IEEE

- Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(7):942—952
- [3] Poolla, K., Khargonekar, P. P., Tikku, A. and Nagpal, K.. A Time Domain Approach to Model Validation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(6):951—959
- [4] Zhou, T. and Kimura, H.. Input-Output Extrapolation-Minimization Theorem and Its Application to Model Validation and Robust Identification. In R. Smith and M. Dahleh(Eds), The Modelling of Uncertainty in Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, London; Springer-Verlag, 1994, 192:127—137
- [5] Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R.. Feedback Control Theory. New York; Macmillan Publishing Company, 1992
- [6] 黄琳, 系统与amp;控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984
- [7] Grenander, U. and Szegö, G.. Toeplitz Forms and Their Applications. New York; Chelsea Publishing Company, 1984
- [8] 中山大学数学力学系·概率论及数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1980

## Model Validation for Uncertain System and Its Unfalsified Probability Estimation

ZHOU Tong

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics · Beijing, 100083, PRC)

**Abstract:** In this paper, we investigate a model validation problem when there is bounded but uncertain additive modelling error in the plant nominal model and the plant nominal model is with intended application as robust controller design. A lower bound is given for the probability under which the plant model can not be invalidated by the supplied time domain identification experiment data.

**Key words:** model validation; robust control; modelling error; model unfalsified probability

### 本文作者简介

周彤 1964年生,工学博士,副教授,目前在北京航空航天大学从事博士后研究工作,感兴趣的领域为鲁棒控制、自适应控制、系统辨识及其在实际控制工程中的应用等。