

# 离散双输出反馈控制的最优协调性合成设计

张红宇 王占林

(北京航空航天大学自动控制系统·北京, 100083)

**摘要:** 本文以离散二次型最优控制理论为基础, 研究了线性时不变系统在双输出反馈控制情况下控制作用的协调性合成设计问题, 构造了一个数值迭代算法来求解相应的最优控制规律. 通过实例计算和对比分析, 既证明了该方法的收敛性和有效性又说明了这种控制问题的一些本质特征.

**关键词:** 离散二次型最优控制; 离散输出反馈控制; 协调性控制合成; 数值迭代

## 1 引言

对某些控制系统, 控制作用必需由几个控制器共同完成, 这些控制器并行或串行于系统之中, 每个控制器的设计需同时兼顾其它控制器的作用, 而且评价准则也不唯一. 典型实例就是人机控制系统, 它一般具有手动控制和自动控制两种作用, 共同来完善系统的动态特性. 在理论上, 这是所谓的非零和协调性动态规划 (non-zero sum cooperative dynamic games) 问题<sup>[1]</sup>, 具有较实际的工程意义.

常见的闭环系统结构有全状态反馈和部分状态反馈两种类型. 前者是标准的二次型最优控制或随机控制问题<sup>[2]</sup>, 而后者是输出反馈问题, 需通过数值计算方法来寻求控制规律<sup>[3]</sup>. 本文以连续时间域双输出反馈控制器的研究结果<sup>[4]</sup>为基础, 着重在离散时间域开发并行双输出反馈控制的协调性合成设计方法.

由于本文的研究将应用于人机控制系统, 而最优控制是描述手动操纵特性的最佳理论, 采用本文的研究方式便于简洁有效地给出操作者在环的控制作用合成方案, 所以本文将具体问题抽象化, 提出具有一般意义的合成算法, 以便在数字控制方面和在后继研究过程中求得更多的应用.

## 2 离散输出反馈控制

考虑图 1 所示的白噪声干扰控制系统的调节器设计问题, 它为单输出反馈控制系统.

控制对象的动态特性用线性时不变的状态方程来描述:

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i + \Gamma w_i, \quad (1)$$

$$y_i = Cx_i. \quad (2)$$

其中, 状态变量  $x_i \in R^n$ ; 控制作用  $u_i \in R^p$ ; 系统矩阵  $A \in R^{n \times n}$ ; 控制矩阵  $B \in R^{n \times p}$ ; 干扰矩阵  $\Gamma \in R^{n \times q}$ ; 输出变量  $y_i \in R^r$ ; 输出矩阵  $C \in R^{r \times n}$ ; 白噪声干扰量  $w_i \in R^q$ , 并且  $E\{w_i\} = 0$ ,  $E\{w_i w_j^T\} = w \delta_{ij}$ ,  $w > 0$ ;  $E$  表示取期望值.

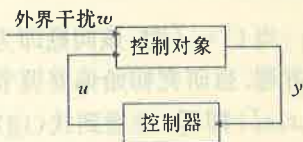


图 1 输出反馈控制系统

评价函数取成如下形式:

$$J = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i] \right\}. \quad (3)$$

其中,对称加权矩阵  $Q \geq 0, R > 0$

控制目的是寻求控制规律

$$u_i = -K y_i = -K C x_i. \quad (4)$$

使评价函数  $J$  达到最小,其中增益矩阵  $K \in R^{r \times r}$ .

将式(4)代入式(1)可以得到闭环系统

$$x_{i+1} = A_c x_i + \Gamma w_i. \quad (5)$$

其中

$$A_c = A - B K C.$$

令  $S = E\{x_i x_i^T\}$ . 由于该闭环系统受白噪声信号  $w_i$  的激励,故  $S$  满足如下形式的离散 Lyapunov 矩阵方程<sup>[2]</sup>:

$$S = A_c S A_c^T + \Gamma w \Gamma^T. \quad (6)$$

将式(4)代入式(3),评价函数变成新的形式

$$J = \text{tr}[(Q + C^T K^T R K C) S]. \quad (7)$$

其中,  $S$  受约束于式(6);  $\text{tr}$  表示求矩阵的迹. 这样,引入对称的 Lagrange 矩阵算子  $P$  可以得到增广的评价函数

$$J = \text{tr}[(Q + C^T K^T R K C) S] + \text{tr}[P(A_c S A_c^T + \Gamma w \Gamma^T - S)]. \quad (8)$$

使用矩阵的偏导关系,可以求得最优解存在的必要条件:

$$\frac{\partial J}{\partial P} = A_c S A_c^T + \Gamma w \Gamma^T - S = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial J}{\partial S} = Q + C^T K^T R K C + A_c^T P A_c - P = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 2 R K C S C^T - 2 B^T P A S C^T + 2 B^T P B K C S C^T = 0. \quad (11)$$

所以,最优控制增益的表达式应为

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A S C^T (C S C^T)^{-1}. \quad (12)$$

利用式(8)和式(10)可以得到评价函数的闭合表达式

$$J = \text{tr}[P \Gamma w \Gamma^T]. \quad (13)$$

当  $C = I$  时,该问题即为全状态反馈控制,并且式(10)变成标准的离散代数 Riccati 矩阵方程. 当研究初始偏差调节问题时,只需将有关公式中的  $\Gamma w \Gamma^T$  项改为初始状态项  $X_0 = E\{x_0 x_0^T\}$  即可. 注意到式(12)的增益表达式又是其自身的隐函数,这意味着它将是迭代更新计算的过程. 对此主要有最优化方法如共轭梯度法和不动点数值迭代方法等等. 本文采用数值迭代计算方法来求解最优增益,以减少计算量. 具体步骤描述如下:

1) 初始化:置  $k = 0$ ,选择初始增益  $K_0$ . 使闭环矩阵  $A_{c0} = A - B K_0 C$  渐近稳定.

2) 第  $k$  次迭代:

1° 令  $A_{ck} = A - B K_k C$ . 由式(9)和式(10)求解矩阵  $S_k$  和  $P_k$ ,由式(13)计算评价函数值  $J_k$ ;

2° 估计增益更新的方向:

$$\Delta K = (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A S_k C^T (C S_k C^T)^{-1} - K_k;$$

3° 更新增益:  $K_{k+1} = K_k + \alpha \Delta K$ , 其中  $\alpha$  的选择需使矩阵  $A_{k+1} = A - BK_{k+1}C$  渐近稳定;

4° 由  $K_{k+1}$  和  $A_{k+1}$  计算更新的矩阵  $P_{k+1}$ , 从而获得更新的评价函数值  $J_{k+1}$ ;

5° 对于给定的误差限  $\epsilon$ ,  $|J_{k+1} - J_k| < \epsilon$  是否成立? 是, 转入 3; 否, 置  $k = k + 1$ , 转入 2, 重新迭代计算.

3) 迭代终止: 置  $K^* = K_{k+1}$  和  $J^* = J_{k+1}$ , 退出.

文献[5]证明了该算法在系统(1)输出可稳定、输出矩阵  $C$  行满秩、加权矩阵  $R$  正定和  $Q$  半正定以及矩阵对  $(\sqrt{Q}, A)$  可检测等条件下将收敛于局部最优解. 实际的控制系统不满足这些条件. 参数  $\alpha$  影响迭代计算的时间及稳定性, 有算法内调整和算法外调整两种方式. 前者主要是确保矩阵方程有解, 可以通过检查矩阵  $A_{k+1}$  的稳定性来完成, 若  $\alpha$  使  $A_{k+1}$  失去渐近稳定性, 则按照某种规律如对半分割等来减小  $\alpha$  的数值, 计算新的增益值; 后者通过观察迭代的动态过程人为地改变  $\alpha$  的大小, 当迭代结果表现出振荡趋势时, 需减小  $\alpha$  来重新开始迭代计算.

### 3 离散双输出反馈控制

考虑图 2 所示的双输出反馈控制的调节器设计问题, 寻求协调性合成设计方案.

控制对象的状态方程为

$$x_{i+1} = Ax_i + B_1 u_{1i} + B_2 u_{2i} + \Gamma w_i. \quad (14)$$

其中, 控制作用  $u_1 \in R^{p_1}$ ,  $u_2 \in R^{p_2}$ ; 控制矩阵  $B_1 \in R^{n \times p_1}$ ,  $B_2 \in R^{n \times p_2}$ ; 其它变量如前面定义.

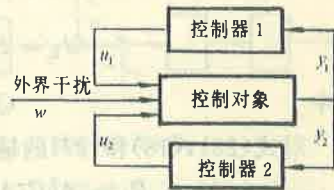


图 2 双输出反馈控制系统

两个控制器具有不同形式的评价函数

$$J_1 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^T Q_1 x_i + u_{1i}^T R_{11} u_{1i} + u_{2i}^T R_{12} u_{2i}) \right\}, \quad (15)$$

$$J_2 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^T Q_2 x_i + u_{1i}^T R_{21} u_{1i} + u_{2i}^T R_{22} u_{2i}) \right\}. \quad (16)$$

其中, 对称加权矩阵  $Q_1, Q_2 \geq 0$ ,  $R_{11}, R_{22} > 0$ ,  $R_{12}, R_{21} \geq 0$ .

输出反馈变量分别为

$$y_{1i} = C_1 x_i, \quad (17)$$

$$y_{2i} = C_2 x_i. \quad (18)$$

其中, 输出变量  $y_1 \in R^{r_1}$ ,  $y_2 \in R^{r_2}$ ; 输出矩阵  $C_1 \in R^{r_1 \times n}$ ,  $C_2 \in R^{r_2 \times n}$ .

控制目的是寻求控制规律

$$u_{1i} = -K_1 y_{1i} = -K_1 C_1 x_i, \quad (19)$$

$$u_{2i} = -K_2 y_{2i} = -K_2 C_2 x_i. \quad (20)$$

使得评价函数  $J_1$  和  $J_2$  达到协调性最小. 其中, 增益矩阵  $K_1 \in R^{p_1 \times r_1}$ ,  $K_2 \in R^{p_2 \times r_2}$ .

控制器 1 的设计:

将式(20)代入式(14). 可以得到相对于控制器 1 的闭环系统

$$x_{i+1} = A_{c1} x_i + B_1 u_{1i} + \Gamma w_i, \quad (21)$$

其中

$$A_{c1} = A - B_2 K_2 C_2.$$

评价函数  $J_1$  改写成新的形式  $J_1$

$$J_1 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^T Q_{c1} x_i + u_{1i}^T R_{11} u_{1i}) \right\}. \quad (22)$$

其中

$$Q_{c1} = Q_1 + C_2^T K_2^T R_{12} K_2 C_2 \geq 0.$$

对式(21), (17)和(22)的输出反馈控制问题,应用2的结果有以下各式成立:

$$S = A_f S A_f^T + \Gamma w \Gamma^T, \quad (23)$$

$$P_1 = A_f^T P_1 A_f + Q_1 + C_1^T K_1^T R_{11} K_1 C_1 + C_2^T K_2^T R_{12} K_2 C_2, \quad (24)$$

$$K_1 = (R_{11} + B_1^T P_1 B_1)^{-1} B_1^T P_1 A_{c1} S C_1^T (C_1 S C_1^T)^{-1}. \quad (25)$$

其中

$$A_f = A - B_1 K_1 C_1 - B_2 K_2 C_2.$$

控制器2的设计:

将式(19)代入式(14),可以得到相对于控制器2的闭环系统

$$x_{i+1} = A_{c2} x_i + B_2 u_{2i} + \Gamma w_i. \quad (26)$$

其中

$$A_{c2} = A - B_1 K_1 C_1.$$

评价函数  $J_2$  改写成新的形式

$$J_2 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^T Q_{c2} x_i + u_{2i}^T R_{22} u_{2i}) \right\}. \quad (27)$$

其中

$$Q_{c2} = Q_2 + C_1^T K_1^T R_{21} K_1 C_1 \geq 0.$$

对式(26), (18)和(27)的输出反馈控制问题,应用2的结果有以下各式成立:

$$P_2 = A_f^T P_2 A_f + Q_2 + C_1^T K_1^T R_{21} K_1 C_1 + C_2^T K_2^T R_{22} K_2 C_2, \quad (28)$$

$$K_2 = (R_{22} + B_2^T P_2 B_2)^{-1} B_2^T P_2 A_{c2} S C_2^T (C_2 S C_2^T)^{-1}. \quad (29)$$

评价函数的闭合表达式分别为

$$J_1 = \text{tr}[P_1 \Gamma w \Gamma^T], \quad (30)$$

$$J_2 = \text{tr}[P_2 \Gamma w \Gamma^T]. \quad (31)$$

式(23)~(25)和式(28), (29)构成了控制问题(14)~(20)最优解存在的必要条件. 当  $C_1 = C_2 = I$  时, 该问题即为全状态耦合反馈控制, 并且式(24)和(28)变成两个标准的耦合离散代数 Riccati 矩阵方程. 可见了, 为求得最优增益  $K_1$  和  $K_2$ , 需同时解决两个耦合的离散 Lyapunov 矩阵方程(24)和(28), 文献[6]证明了该过程存在唯一的 Nash 平衡解. 参考控制器2的算法, 安排如下的数值迭代算法来求取最优增益矩阵:

1) 初始化: 置  $k = 0$ , 选择初始增益  $K_{10}, K_{20}$  使闭环矩阵  $A_{f0} = A - B_1 K_{10} C_1 - B_2 K_{20} C_2$  渐近稳定.

2) 第  $k$  次迭代:

1° 令  $A_{fk} = A - B_1 K_{1k} C_1 - B_2 K_{2k} C_2$ , 由式(23), (24)和(28)来解矩阵  $S_k, P_{1k}$  和  $P_{2k}$ , 由式(30)和(31)计算评价函数值  $J_{1k}$  和  $J_{2k}$ ;

2° 估计增益更新的方向:

$$\Delta K_1 = (R_{11} + B_1^T P_{1k} B_1)^{-1} B_1^T P_{1k} A_{c1k} S_k C_1^T (C_1 S_k C_1^T)^{-1} - K_{1k},$$

$$\Delta K_2 = (R_{22} + B_2^T P_{2k} B_2)^{-1} B_2^T P_{2k} A_{c2k} S_k C_2^T (C_2 S_k C_2^T)^{-1} - K_{2k};$$

3° 更新增益:  $K_{1k+1} = K_{1k} + \alpha_1 \Delta K_1, K_{2k+1} = K_{2k} + \alpha_2 \Delta K_2$ . 其中,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  选择得使矩阵  $A_{fk-1} = A - B_1 K_{1k+1} C_1 - B_2 K_{2k-1} C_2$  渐近稳定;

4° 由  $K_{1k+1}, K_{2k+1}$  和  $A_{fk+1}$  计算更新的矩阵  $P_{1k+1}$  和  $P_{2k+1}$ , 从而获得更新的评价函数数值  $J_{1k+1}$  和  $J_{2k+1}$ ;

5° 对于给定的误差限  $\epsilon, |J_{1k+1} - J_{1k}| < \epsilon (i = 1, 2)$  是否成立? 是, 转入 3; 否, 置  $k = k + 1$ . 转入 2, 重新迭代计算.

3) 迭代终止: 置  $K_1^* = K_{1k+1}, K_2^* = K_{2k+1}$  和  $J_1^* = J_{1k+1}, J_2^* = J_{2k+1}$ , 退出.

同样, 在系统(14)输出可稳定, 输出矩阵  $C_1, C_2$  行满秩、加权矩阵  $R_{11}, R_{22}$  正定和  $Q_{c1}$  和  $Q_{c2}$  半正定以及矩阵对  $(\sqrt{Q_{c1}}, A_{c1})$  和  $(\sqrt{Q_{c2}}, A_{c2})$  可检测等条件下, 该算法将稳定地收敛于局部最优解. 这些条件在一般情况下是可以满足的. 参数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  可以参考 2 的算法来调整, 使矩阵  $A_{fk+1}$  具有渐近稳定性. 迭代过程的收敛性使  $J_{1k}$  和  $J_{2k}$  都将趋近于某稳定值, 所以  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的数值只需能使两个评价函数都达到迭代精度的要求即可.

以上算法的主要计算工作是反复求解离散的 Lyapunov 或 Riccati 矩阵方程, 这可以采用高速高精度的计算机迭代算法“矩阵符号函数法”来完成<sup>[7]</sup>, 不再赘述.

### 4 设计实例

考虑图 3 所示的控制实例. 对于人机系统, 控制作用  $u_1$  和从  $u_1$  到  $x_4$  的传递函数描述了具有积极操纵能力的操纵者控制特性. 用式(4)的离散时不变线性状态方程来描述, 各矩阵的参量表达式如下:

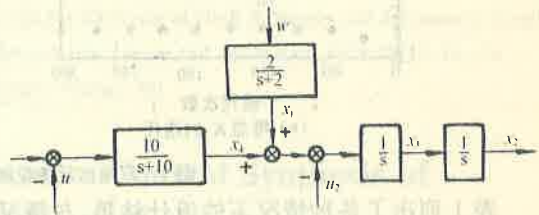


图 3 控制实例的结构图

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ \Delta t & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 10\Delta t \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10\Delta t \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$E\{w_i, w_i^T\} = w = 1/\Delta t, \Delta t$  为采样时间, 取成 0.01 秒.

为便于比较分析, 分别研究三种情况:

1) 仅有控制器 1 的全阶状态反馈, 即

$$u_{1i} = -k_{11}x_{1i} - k_{12}x_{2i} - k_{13}x_{3i} - k_{14}x_{4i}. \tag{32}$$

2) 仅有控制器 1 的输出状态反馈, 即

$$u_{1i} = -k_{11}x_{2i} - k_{12}x_{3i}. \tag{33}$$

3) 双控制器的输出状态反馈, 即

$$u_{1i} = -k_{11}x_{2i} - k_{12}x_{3i}, \tag{34}$$

$$u_{2i} = -k_{21}x_{3i} - k_{22}(x_{1i} + x_{4i}). \tag{35}$$

评价函数分别取为

$$J_1 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{1i}^2 + r_1 u_{1i}^2) \right\}, \tag{36}$$

$$J_2 = E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{2i}^2 + r_2 u_{2i}^2) \right\}, \quad (37)$$

其中,取  $r_1 = 1, r_2 = 1, 0.5$  等情况来研究.

图4是情况2)的增益迭代过程,图5为情况3)的增益  $K_1, K_2$  的迭代过程( $r_1 = r_2 = 1$ ).  $K_1$  初始值的选择可以参考情况1)的结果取成  $k_{11} = k_{12} = 1, K_2$  初始值可以选为  $k_{21} = k_{22} = 0$ . 迭代精度为  $10^{-6}$ , 参数  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$ , 可见, 本文的迭代算法具有良好的动态特性和收敛性.

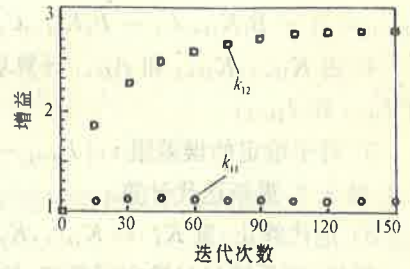


图4 单输出反馈控制增益的迭代过程

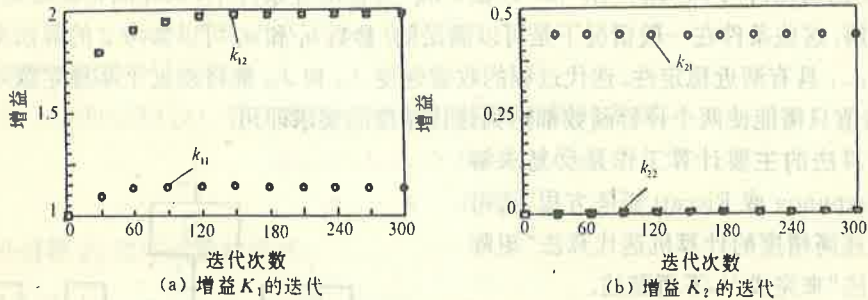


图5 双输出反馈控制增益的迭代过程

表1列出了各种情况下的设计结果,与情况I相比,情况II因状态信号不充分故只能实现“次”最优控制,评价函数值  $J_1$  增大.当考虑情况III的控制作用合成时,  $J_1$  和  $E\{x_1^2\}$  减小,但系统的整体误差  $E\{x_2^2\}$  和  $E\{x_3^2\}$  却有所增加,这反映了控制合成作用以牺牲少量的误差调节精度来降低控制器1的控制代价这种本质特征.  $J_1$  的减小意味着合成作用改善了控制器1的评价情况或者称为减轻了控制器1的“工作负担”,这种情况随着控制器2控制作用的增强而越来越显著,同时也可以使系统的调节误差有所减小,如  $r_1 = 1, r_2 = 0.5$  的情况所示.该现象具有实际的工程意义.注意到  $k_{22}$  是为弥补控制器2导致的增益衰减而引入的,只有当  $u_{2f}$  的控制作用足够强时才显示出必要性.而在  $r_2 = 1$  的情况下  $k_{22}$  是可以忽略的.

表1 控制实例的设计结果

参量 情况	$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}$	$E\{x_2^2\}$	$E\{x_3^2\}$	$E\{x_4^2\}$
I	1	0.5324, 0.9930, 1.5103, 0.1411	0.8468	/	/	/
II	1	1.1664, 2.7180	0.9872	0.1462	0.0873	0.8088
III	1	1.1204, 1.9860	0.7953	0.1735	0.1030	0.6036
	1	0.4028, 0.0002	0.1903			
	1	1.0845, 1.3146	0.5238	0.1707	0.0890	0.3462
	0.5	1.1615, 0.0415	0.2363			

## 5 总 结

本文进行了离散时间域的双输出反馈控制器的协调性合成设计,构造了具体的数值迭代计算方法,并通过设计实例揭示了控制合成作用的效果及其意义。

## 参 考 文 献

- [1] Isaacs, R. . Differential Games. Kruger Publishing Company, Huntington, N. Y. , 1975
- [2] Kwakernaak, H. and Sivan, R. . Linear Optimal Control Systems. John Wiley & Sons, 1972
- [3] Levine, W. S. and Athans, M. . On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automat. Contr. , 1970, AC-15(1):44—48
- [4] Auderson, K. W. and Shannon, G. F. . Manual Control System Design Using a Dual Suboptimal Control Model. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1975, 5(2):245—251
- [5] Moerder, D. D. and Calise, A. J. . Convergence of a Numerical Algorithm for Calculating Optimal Output Feedback Gains. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1985, 30(9):900—903
- [6] Pavassiliopoulos, G. P. , Medanic, J. V. and Cruz, J. B. . On the Existence of Nash Strategies and Solutions to Coupled Riccati Equations in Linear-Quadratic Games. J. of Optimization Theory and Application, 1979, 28(1):49—76
- [7] Bittani, S. and Laub, A. J. . The Riccati Equation. Springer-Verlag, 1991

## Discrete Optimal Cooperative Control Synthesis of Dual Output Feedback Controllers

ZHANG Hongyu and WANG Zhanlin

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics • Beijing, 100083, PRC)

**Abstract:** Based on the discrete-time Linear-quadratic optimal control theory, this paper solves the optimal cooperative control synthesis problem for a linear time-invariant system with dual output feedback controllers. A numerical iterative algorithm is proposed to find the optimal control laws. The convergence and effects of this method are validated by analytical results from a design example, and some characteristics of this control problem are revealed by data comparisons.

**Key words:** discrete linear-quadratic optimal control; discrete output feedback control; cooperative control synthesis; numerical iteration

### 本文作者简介

**张红宇** 1966年生。1984年7月入北京航空航天大学自动控制系流体传动及控制专业学习,1988年7月获学士学位,继续攻读该专业的硕士学位,1990年9月提前攻读博士学位。从事操纵系统和驾驶飞行控制系统的研究,1992年9月至1994年4月赴日本九州大学工学部航空工学科留学,1995年3月获工学博士学位。主要研究兴趣:人机控制,预见控制和鲁棒控制等。

**王占林** 1934年生。教授,北京航空航天大学学术委员会副主任,自动控制系流体传动及控制专业博士生导师。