第 13 卷第 2 期
1996 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 2
Apr., 1996

一类不确定随机系统的鲁棒 H_∞ 约束方差控制*

朱纪洪　郭　治

(南京理工大学自动控制系·南京，210094)

摘要：本文根据 H_∞ 优化设计理论及稳态状态协方差配置的系统综合方法，利用一个修正的 Riccati 方程，对一类具有参数扰动的不确定线性随机系统讨论了鲁棒状态反馈控制器设计. 使得闭环系统不但鲁棒稳定并具有指定的稳定裕度；而且系统性能也是鲁棒的，闭环系统同时满足给定的 H_∞ 性能指标及状态方差上限约束.

关键词：线性连续随机系统；方差约束；状态反馈；不确定系统；H_∞ 控制

1　引　言

随机系统稳态状态方差是其稳态性能的直观反映，因此许多实际系统的性能指标是以其稳态状态方差及其上限形式给出的[1]. 文献[1,2]研究了连续确定性随机系统的稳态状态协方差配置，然而实际系统往往存在参数摄动或建模误差，80 年代初出现的 H_∞ 优化设计理论是控制系统鲁棒性设计的重要发展，它以从噪声到输出传递函数阵的 H_∞ 范数为设计目标. 本文用一个修正的 Riccati 方程，按照给定的状态方差上限及 H_∞ 指标来设计状态反馈增益，使得闭环系统在存在参数不确定性时具有指定的稳定裕度，且稳态状态方差及 H_∞ 性能指标均满足既定的约束.

2　问题描述

考虑下述连续不确定线性系统[3,4]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t) + Bu(t) + Dw(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $x(t)\in \mathbb{R}^{n_x}, u(t)\in \mathbb{R}^{n_u}, w(t)\in \mathbb{R}^{n_w}$ 为外界干扰、在论及系统方差性能时理解为零均值单位白噪声而考虑 H_∞ 指标时认为 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，$L_2[0,\infty)$ 为$[0,\infty)$上的平方可积函数空间. $A,\Delta A,B,C,D$ 为适维矩阵，$B^TB>0$，且 $C^TC>0$ 或 $DD^T>0$，并假定

$\Delta A\in\{\Delta A\mid \Delta A=G\Sigma H, G,H$ 为已知矩阵，$\Sigma\cdot\Sigma^T\leqslant I$ 且矩阵 Σ 的元素Lebesgue可测$\}$.

设状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \tag{2.2}$$

则闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_c+\Delta A)x(t) + Dw(t), \\ A_c &= A + BK. \end{aligned} \tag{2.3}$$

要求确定 K，使得闭环系统满足

1）闭环稳定并具有指定的稳定裕度 α；

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

本文于 1994 年 9 月 13 日收到. 1995 年 8 月 11 日收到修改稿.

2) $[X]_{ii} < \sigma_i^2, i = 1,2,\cdots,n_x$, $[X]_{ii}$ 表示稳态状态协方差阵的第 i 个对角元素即第 i 个状态的稳态方差, X 是下列 Ляпунов 方程

$$(A_c + \Delta A)X + X(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{2.4}$$

的解.

3) $\| H(s) \|_\infty \leqslant \gamma$, 其中 $H(s)$ 为从噪声 $w(t)$ 到输出 $y(t)$ 的传递函数矩阵, $\| H(s) \|_\infty = \sup\limits_{w\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}[H(jw)]$, $\bar{\sigma}[\cdot]$ 表示矩阵$[\cdot]$的最大奇异值.

3　主要结果

定理 1　对给定正数 γ 和稳定裕度 α, 若存在 $\beta > 0$ 使得方程

$$A_c\bar{X} + \bar{X}A_c^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.1}$$

存在对称正定解 $\bar{X}$, 则

1) $\mathrm{Re}[\lambda_i(A_c + \Delta A)] < -\alpha, \quad i = 1,2,\cdots,n_x$;

2) 闭环系统稳态状态协方差 $X < \bar{X}$;

3) $\| H(s) \|_\infty \leqslant \gamma$.

证

$$\begin{aligned}
0 &= A_c\bar{X} + \bar{X}A_c^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}} \\
&\geqslant A_c\bar{X} + \bar{X}A_c^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta G\Sigma(G\Sigma)^{\mathrm{T}} + \frac{(H\bar{X})^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}} \\
&\geqslant A_c\bar{X} + \bar{X}A_c^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + G\Sigma H\bar{X} + \bar{X}(G\Sigma H)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} \\
&= (A_c + \Delta A)\bar{X} + \bar{X}(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + DD^{\mathrm{T}} \\
&= (A_c + \Delta A + \alpha I)\bar{X} + \bar{X}(A_c + \Delta A + \alpha I)^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + DD^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

根据假定条件得出 $(A_c + \Delta A + \alpha I)\bar{X} + \bar{X}(A_c + \Delta A + \alpha I)^{\mathrm{T}} < 0$, 所以由 Ляпунов 稳定性理论可知 $A_c + \Delta A + \alpha I$ 渐近稳定, 所以

$$\mathrm{Re}[\lambda_i(A_c + \Delta A)] < -\alpha, \quad i = 1,2,\cdots,n_x.$$

由上面的证明过程可知

$$(A_c + \Delta A)\bar{X} + \bar{X}(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0. \tag{3.2}$$

式(3.2)减去式(2.4)得

$$(A_c + \Delta A)(\bar{X} - X) + (\bar{X} - X)(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} \leqslant 0.$$

于是

$$(A_c + \Delta A)(\bar{X} - X) + (\bar{X} - X)(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} < 0.$$

又 $A_c + \Delta A$ 渐近稳定, 所以

$$\bar{X} - X > 0 \quad \text{即} \quad X < \bar{X}.$$

由标准 H_∞ 理论中的界实引理可知 $\| H(s) \|_\infty \leqslant \gamma$.

记

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix} = F^{\mathrm{T}}\left[A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}}\right]F.$$

其中 F 为 BB^+ 的酉模态矩阵.

定理 2 设 $\bar{X}$ 为给定的对称正定阵，当且仅当

$$(I - BB^+)\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}}\right) \cdot (I - BB^+) = 0, \tag{3.3}$$

则关于 K 的矩阵方程(3.1)的解存在，其通解为

$$K = -\frac{1}{2}B^+\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}} - S_k\right)\bar{X}^{-1} + (I - B^+B)Z. \tag{3.4}$$

其中 B^+ 为 B 的 Moore-Penrose 逆，Z 为任意适维矩阵，斜对称阵 $S_k = F\begin{bmatrix} \hat{S}_{k_{11}} & -Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}$，$\hat{S}_{k_{11}} \in \mathrm{R}^{n_u \times n_u}$ 为任意斜对称阵.

证 方程(3.1)等价于[1]

$$BK\bar{X} = -\frac{1}{2}\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}} - S_k\right). \tag{3.5}$$

其中 S_k 为斜对称阵，方程(3.5)有解的充要条件为[5]

$$(I - BB^+)\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}}\right) = (I - BB^+)S_k,$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n_x - n_u)} \end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}}\right)F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n_x - n_u)} \end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}S_kF. \tag{3.6}$$

记 $F^{\mathrm{T}}S_kF \triangleq \begin{bmatrix} \hat{S}_{k_{11}} & \hat{S}_{k_{12}} \\ -\hat{S}_{k_{12}}^{\mathrm{T}} & \hat{S}_{k_{22}} \end{bmatrix}$，则式(3.6)等价于

$$Q_{12}^{\mathrm{T}} = -\hat{S}_{k_{12}}^{\mathrm{T}}, \tag{3.7a}$$

$$Q_{22} = \hat{S}_{k_{22}}. \tag{3.7b}$$

显然由于 Q_{22} 为对称正定阵，$\hat{S}_{k_{22}}$ 为斜对称阵，所以(3.7b)成立当且仅当

$$Q_{22} = \hat{S}_{k_{22}} = 0,$$

同时总可选取 $\hat{S}_{k_{12}} = -Q_{12}$ 使得式(3.7a)成立，因此方程(3.1)有解的充要条件是

$$Q_{22} = 0.$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n_x - n_u)} \end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}\left(A\bar{X} + \bar{X}A^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{X} + \frac{\bar{X}C^{\mathrm{T}}C\bar{X}}{\gamma^2} + \beta GG^{\mathrm{T}} + \frac{\bar{X}H^{\mathrm{T}}H\bar{X}}{\beta} + DD^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\cdot F\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(n_x-n_u)}\end{bmatrix}=0,$$

等价于

$$(I-BB^+)\left(A\overline{X}+\overline{X}A^{\mathrm{T}}+2\alpha\overline{X}+\frac{\overline{X}C^{\mathrm{T}}C\overline{X}}{\gamma^2}+\beta GG^{\mathrm{T}}+\frac{\overline{X}H^{\mathrm{T}}H\overline{X}}{\beta}+DD^{\mathrm{T}}\right)$$
$$\cdot(I-BB^+)=0.$$

由上面的证明过程可知，若条件(3.3)成立则由式(3.5)可得方程(3.1)的通解为

$$K=-\frac{1}{2}B^+\left(A\overline{X}+\overline{X}A^{\mathrm{T}}+2\alpha\overline{X}+\frac{\overline{X}C^{\mathrm{T}}C\overline{X}}{\gamma^2}+\beta GG^{\mathrm{T}}+\frac{\overline{X}H^{\mathrm{T}}H\overline{X}}{\beta}\right.$$
$$\left.+DD^{\mathrm{T}}-S_k\right)\overline{X}^{-1}+(I-B^+B)Z.$$

其中 S_k 的表达式为

$$S_k=F\begin{bmatrix}\hat{S}_{k_{11}} & -Q_{12}\\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\hat{S}_{k_{11}}\in\mathrm{R}^{n_u\times n_u}$ 为任意斜对称阵.

4　设计举例

考虑如下不确定二阶线性随机系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}w(t),$$

$$y(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

其中参数 T 存在摄动，即

$$T=1+\Delta T,\quad \Delta T\in(-1,1).$$

显然有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \Delta A=G\Sigma H=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\Delta T[0\quad 1],$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=[1\quad 0],\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

现要求状态反馈增益 K，使

1) 闭环系统渐近稳定，且所有闭环极点具有稳定裕度 $\alpha=0.5$；

2) 当 $w(t)$ 是均值为零、方差为 I_2 的白噪声时，系统稳态状态方差满足

$$\mathrm{var}[x_1]\leqslant 0.4^2,\quad \mathrm{var}[x_2]\leqslant 1.8^2;$$

3) $\|H(s)\|_\infty\leqslant 0.7$.

根据设计要求，令

$$\overline{X}=\begin{bmatrix}0.16 & x_{12}\\ x_{12} & 3.24\end{bmatrix}.$$

其中 x_{12} 为待定系数，把 $\overline{X}$ 及其它参数代入(3.3)，得

$$2x_{12}+\frac{1}{\beta}x_{12}^2+1.212=0.$$

不妨取 $\beta = 6.0$，则可解得 $x_{12} = -0.64$. 于是

$$X = \begin{bmatrix} 0.16 & -0.64 \\ -0.64 & 3.24 \end{bmatrix}.$$

显然由此构造出的 X 对称正定，可进一步求得

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1.405 \\ -1.045 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是由式(3.4)可得 $K = [-98.633 \quad -22.462]$.

参 考 文 献

[1] Hotz, A. F. and Skelton, R. E. . A Covariance Control Theory. Int. J. Control, 1987, 46(1): 13—32

[2] Skelton, R. E. and Ikeda, M. . Covariance Controllers for Linear Continuous-Time Systems. Int. J. Control, 1989, 49(5): 1773—1785

[3] Khargonekar, P. P. , Petersen, I. R. and Zhou, K. . Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H∞ Control Theory, IEEE Trans. Automat. Contr. 1990, AC-35(3): 356—361

[4] Auba, T. and Funahashi, Y. . Upper and Lower Bounds of Gramian for A Class of Perturbed Linear System. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1992, AC-37(1): 1659—1661

[5] Ben, A. Israel and Greville, T. N. E. . Generalized Inverse: Theory and Application. John Wiley and Sons. , Inc. , 1974

[6] Xu H. H. , Skelton, R. E. and Zhu G. . Upper and Lower Covariance Bounds for Perturbed Linear Systems. IEEE Trans Automat. Contr. , 1990, 35(8): 944—948

The Robust H∞ Variance Control of Stochastic System with Uncertainty

ZHU Jihong and GUO Zhi

(Automatic Control Department, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: According to H∞ control theory and steady state covariance assignment design method, a stability and performance robust state feedback controller is proposed for a class of linear stochastic systems with model parameter uncertainties from a modified Riccati equation. The closed-loop system will have prespecified steady margin and H∞ performance index. And the steady-state variance will satisfy constraints for all permitted disturbances.

Key words: linear continuous stochastic system; variance constraints; state feedback; uncertain systems; H∞ control

本文作者简介

朱纪洪 1968年生. 1990年获江苏理工大学工学学士学位. 同年进入南京理工大学攻读自动控制理论与应用专业研究生. 1995年6月获工学博士学位. 并留校任教. 目前研究领域：不确定系统多目标鲁棒控制、协方差配置、H∞控制等.

郭 治 见本刊1996年第2期第166页.