第13卷第2期 控制理论与应用 Vol. 13, No. 2
1996年4月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Apr., 1996

可解的具有广义对称性的非线性系统的同构分解与可控性*

井元伟 胡三清 刘晓平 张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

摘要:本文讨论了一类具有广义对称性的非线性系统的同构分解及其可控性问题. 首先提出了可解的具有广义对称性的系统的概念,然后推出了此类系统的以商系统为基本构造的分解形式,最后证明了此类系统可控性在一定条件下可由分解后的系统的可控性来确定的结论,同时得到了相应的充要条件.

关键词:广义对称;同构分解;可解;可控性

1 引言

近几十年来,对于具有对称结构系统的研究取得了很大进展. 对称结构的普遍性[1]及其便利性[2]已引起了国内外学者的普遍重视[2~7]. 文[2]首次给出了对称非线性系统的定义,并讨论了对称系统的局部或全局分解等问题. 过去对于对称系统的可控性则很少研究. 文[7]在首次提出广义对称性概念的基础上,讨论了可控性问题,但不是从系统分解的角度去做. 本文在以上结果的基础上,提出了一类可解的具有广义对称性的系统的概念,得出了较好的结果.

本文讨论定义在 n 维光滑流形 M 上的光滑非线性系统

$$\dot{x} = f(x,u). \tag{1}$$

其中 $x \in M, u \in U, U$ 是容许控制流形.

设 G 是一个 k 维连通 Lie 群,它在 M 上有左作用 $\Phi: G \times M \to M, (g,x) \to \Phi_g x$,且 Φ 是自由和正常的,因而 $M/G, Gx = \{\Phi_g x \mid g \in G\}$ 分别是 n-k 维和 k 维流形. 进一步假定 $p: M \to M/G$ 有一个全局截面 σ,记系统(1)在 $x \in M$ 处的可达集为 $R_{(1)}(x)$. 下面给出本文中有关定义.

定义 1 系统(1)称为是广义状态对称的(简称广义对称),若存在光滑映射 $q: G \times U \to U, (g,u) \to q(u,g)$,使得对于 $\forall\, x \in M, u \in U, g \in G$,下式成立

$$(\Phi_g)_* f(x,u) = f(\Phi_g x, q(u,g)). \tag{2}$$

记为 (G, Φ, q).

定义 2 称流形 M/G 上的系统

$$\dot{y} = \tilde{f}(y,u) \triangleq p_* f(\sigma(y), u) \tag{3}$$

为系统(1)的商系统.

定义 3 设 q 为 $U \times G \to U$ 的光滑映射, $\forall\, u \in U$,由 $q(u',g) = u$,可解出 $u' = q^{-1}(u, g), g \in G$,且 $g_1 \neq g_2$ 时, $u'_1 \neq u'_2$,则称 q 为可解的.

---

* 国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助课题.

本文于1994年10月5日收到. 1995年10月17日收到修改稿.

定义 4 若系统(1)具有广义对称 (G,Φ,q)，q 为可解的，则称系统(1)为可解的具有广义对称性的系统.

2 可解的具有广义对称性的系统的同构分解

这一节给出可解的具有广义对称性的系统的同构分解的具体形式. 为此，引入下面的引理.

引理 1[7] 设系统(1)是广义对称的，则

1) 若 $x(t)$ 是系统(1)从 x_0 出发的一条积分曲线，则 $p(x(t))$ 是商系统(3)从 $p(x_0)$ 出发的一条积分曲线.

2) 对商系统(3)的任意从 $p(x_0)$ 出发的积分曲线 $y(t)$，都有系统(1)的从 x_0 出发的积分曲线 $x(t)$，使得 $y(t)=p(x(t))$.

利用引理 1，可以得到

定理 1 设系统(1)为广义对称 (G,Φ,q)，如果 Φ 是自由、正常的，q 为可解的，$p:M\to M/G$ 有一全局截面 σ，则系统(1)同构于系统

$$\dot{y}=\tilde{f}(y(t),u(t))=p_*f(\sigma(y(t),u(t))), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\dot{g}=&(T_eL_{g(t)})(T_e\tilde{\Phi}_{\sigma(y(t))})^{-1}\\&\cdot[f(\sigma(y(t),q^*(u(t),g(t)))-(T_{y(t)}\sigma)p_*f(\sigma(y(t),u(t)))].\end{aligned} \tag{5}$$

证 因为 Φ 是自由、正常的，$p:M\to M/G$ 有一全局截面 σ，则 $\sigma(y)$ 由 y 唯一确定. 因而对于固定的 u，$p_*f(\sigma(y),u)$ 是商系统(4)在 M/G 上 y 点处的唯一确定的切向量，所以(4)是唯一确定的.

设 $x_0\in M$，$u(t)$ 是一个连续时间函数，$x(t)$ 是系统(1)在控制为 $u(t)$ 时的积分曲线，则由引理 1，$y(t)=p(x(t))$ 是系统(4)的积分曲线，满足 $y(0)=p(x_0)$. 由于 σ 是一截面，则可以在 M 上定义一条可微分曲线 $d(t)$，满足 $d(t)=\sigma(y(t))$. 因为 $p(d(t))=p(x(t))$，Φ 是自由、正常的，于是可唯一地得到一条 G 上的可微曲线 $g(t)$，满足 $x(t)=\Phi_{g(t)}(d(t))$. 于是 $x(t)$ 被唯一地同构分解成 $y(t)$，$g(t)$.

下面只需求出 $g(t)$ 满足的微分方程. 注意到

$$f(x(t),u(t))=\dot{x}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(g(t),d(t))=T_{d(t)}\Phi_{g(t)}\dot{d}(t)+T_{g(t)}\Phi_{d(t)}\dot{g}(t). \tag{6}$$

对(6)式中的 $T_{g(t)}\Phi_{d(t)}\dot{g}(t)$ 进行变形，因为 $\dot{g}(t)\in T_{g(t)}G$，设 $\xi_g\in T_gG$，则 $\xi=T_gL_{g^{-1}}(\xi_g)\in T_eG$，这里 $L_{g^{-1}}$ 是 G 上的左移算子. 则对于 $m\in M$，有

$$\begin{aligned}T_g\Phi_m(\xi_g)&=(T_g\Phi_m)(T_eL_g)(\xi)=T_e(\Phi_m\cdot L_g)(\xi)\\&=T_e(\Phi_g\cdot\Phi_m)(\xi)=(T_m\Phi_g)(T_e\Phi_m)(\xi).\end{aligned} \tag{7}$$

而

$$T_e\Phi_m(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_m(\exp t\xi)|_{t=0}=\xi_M(m). \tag{8}$$

故

$$T_g\Phi_m(\xi_g)=T_m\Phi_g(\xi_M(m))=T_m\Phi_g((T_gL_{g^{-1}}\xi_g)_M(m)). \tag{9}$$

将(9)式代入(6)式得

$$f(x(t),u(t))=T_{d(t)}\Phi_{g(t)}\dot{d}(t)+T_{d(t)}\Phi_{g(t)}(T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t))_M(d(t)). \tag{10}$$

由于 q 是可解的，则

$$f(x(t),u(t))=f(x(t),q(u'(t),g(t))). \tag{11}$$

其中

$$u'(t) = q^{*}(u(t),g(t)). \tag{12}$$

将(11)式代入(10)式得

$$f(x(t),q(u'(t),g(t))) = T_{d(t)}\Phi_{g(t)}\dot{d}(t) + T_{d(t)}\Phi_{g(t)}(T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t))_M(d(t)). \tag{13}$$

由广义对称性知

$$T_m\Phi_{g(t)}f(m,u'(t)) = f(\Phi_{g(t)}(m),q(u'(t),g(t))). \tag{14}$$

将(14)式代入(13)式，令 $m = d(t)$ 得

$$T_{d(t)}\Phi_{g(t)}f(d(t),u'(t)) = T_{d(t)}\Phi_{g(t)}\dot{d}(t) + T_{d(t)}\Phi_{g(t)}(T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t))_M(d(t)). \tag{15}$$

因为 $\Phi_g:M\to M$ 是一同胚映射，对于 $\forall g\in G$，则有 $T_{d(t)}\Phi_{g(t)}$ 非奇异，于是由(15)式得

$$f(d(t),u'(t)) = \dot{d}(t) + (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t))_M(d(t)). \tag{16}$$

设

$$\xi_M(d(t)) = (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t))M(d(t)). \tag{17}$$

则

$$\xi_M(d(t)) = f(d(t),u'(t)) - \dot{d}(t). \tag{18}$$

运用(8)式得

$$T_e\Phi_{d(t)}(\xi(t)) = \xi_M(d(t)) = f(d(t),u'(t)) - \dot{d}(t). \tag{19}$$

因为 Φ 是自由、正常的，则 $\Phi_m:G\to M$ 是 G 上的同胚映射，故由(19)式可唯一地解出 $\xi(t) = (T_e\tilde{\Phi}_{d(t)})^{-1}\xi_M(d(t))$，即

$$T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)}\dot{g}(t) = (T_e\tilde{\Phi}_{d(t)})^{-1}\xi_M(d(t)). \tag{20}$$

其中

$$\tilde{\Phi}_m:G\to G\cdot m, g\to\Phi(g,m).$$

又因为 L_g 是同胚映射，对于 $\forall g\in G$，由(20)式可得

$$\dot{g}(t) = (T_eL_{g(t)})(T_e\tilde{\Phi}_{d(t)})^{-1}[f(d(t),u'(t)) - \dot{d}(t)]. \tag{21}$$

由于 $d(t) = \sigma(y(t))$，(21)式可化为

$$\dot{g}(t) = (T_eL_{g(t)})(T_e\tilde{\Phi}_{\sigma(y(t))})^{-1}[f(\sigma(y(t)),u'(t)) - (T_{y(t)}\sigma)\tilde{f}(y(t),u(t))]. \tag{22}$$

将(4)式和(12)式代入(22)式即得(5)式. 从而系统(1)同构分解成系统(4),(5).

3　可解的具有广义对称性的系统的可控性

本节讨论可解的具有广义对称性的系统及其同构分解后的系统的可控性. 先引入如下引理.

引理 2[7]　如果系统(1)是广义对称的系统，$S_t(x,u)$ 是系统(1)从 x 出发对应于控制 u 的积分曲线，则 $\Phi_gS_t(x,u)$ 是系统(1)从 Φ_gx 出发对应于控制 $q(u,g)$ 的积分曲线，即 $\Phi_gS_t(x,u) = S_t(\Phi_gx,q(u,g))$. 在前叙知识的基础上，于是有

定理 2　若系统(1)具有广义对称(G,Φ,q)，q 是可解的，$x_0\in M$，$p:M\to M/G$ 有一全局截面 σ，x_0 在同构下分解成 g_0,y_0. 记 $g_0\sigma = \{\Phi(g_0,x)\mid x\in\sigma\}$，且系统(1)在 $g_0\sigma$ 上是弱可控的，则系统(1)在 x_0 处全局可控的充分条件是

1) 系统(5)在 g_0 处全局可控；

2) 系统(4)在 y_0 处全局可控.

证　因为系统(1)是广义对称的，q 是可解的，$p:M\to M/G$ 有一全局截面 σ，故由定理1，系统(1)同构分解成系统(4),(5). 任设 $z\in M$，$z\notin g_0\sigma$，(若 $z\in g_0\sigma$，则由于系统(1)在 $g_0\sigma$

上是弱可控的，易知 $z \in R_{(1)}(x_0)$). 由条件 2) 知，存在一条从 y_0 出发的积分曲线 $y(t)$，使得 $y(t_1) = p(z)$. 由引理 2 知，存在从 x_0 出发的积分曲线 $x(t)$，使得 $p(x(t_1)) = y(t_1) = p(z)$，于是 $x(t_1)$ 与 z 在同一轨道上. 故存在 $g \in G$，使得 $z = \Phi_g x(t_1)$，由引理 1 知，$z = \Phi_g x(t_1) \in R_{(1)}(\Phi_g x_0)$.

记 $gg_0\sigma = \{\Phi_g x | x \in g_0\sigma\}$，由条件 1) 知至少存在一点 $x^* \in R_{(1)}(x_0)$，其中 $x^* \in gg_0\sigma$.（否则，由于 $g_0\sigma$ 上的点对于 x_0 是弱可控的，因而 $g_0\sigma$ 上所有点都不能到达 $gg_0\sigma$，于是不能使得系统(5) 满足从 g_0 到达 g. 这与条件 1) 矛盾). x^* 可写成 $\Phi_g x'$，其中 $x' \in g_0\sigma$. 由于 $g_0\sigma$ 上的点对于 x_0 是弱可控的. 所以 $x_0 \in R_{(1)}(x')$. 由引理 1 知，$\Phi_g x_0 \in R_{(1)}(\Phi_g x') = R_{(1)}(x^*)$，从而 $z = \Phi_g x(t_1) \in R_{(1)}(x_0)$. 由于 $z \in M$ 是任意的，知系统(1) 在 x_0 处是全局可控的.

证毕.

定理 3 在定理 2 的假设下，若对于 $\forall\ \Phi_g x \in R_{(1)}(x_0), g \in G, x \in g_0\sigma$，有 G 中一条积分曲线从 g_0 能到达 g，则定理 2 中的条件 1) 和 2) 还是必要的.

证　设系统(1) 在 $x_0 \in M$ 处全局可控. 对于 $\forall\ \bar{y} \in M/G$，因为系统(1) 是广义对称的，$p: M \to M/G$ 有一全局截面 σ，记 $d = \sigma(\bar{y})$，且系统(1) 在 x_0 处全局可控，故存在一条从 x_0 出发的积分曲线 $x(t)$，使得 $x(t_1) = d$. 由引理 1 知，$y(t) = p(x(t))$ 是商系统(4) 从 $p(x_0) = y_0$ 出发的一条积分曲线，且 $y(t_1) = p(x(t_1)) = p(d) = p(\sigma(\bar{y})) = \bar{y}$，所以 $y(t)$ 是从 y_0 出发经过 $\bar{y}$ 的一条积分曲线. 由 $\bar{y} \in M/G$ 的任意性知条件 2) 成立.

对于 $\forall\ g \in G$，任取 $\Phi_g x$，其中 $x \in g_0\sigma$. 由于系统(1) 在 x_0 处全局可控，故 $\Phi_g x \in R_{(1)}(x_0)$. 于是根据已知条件知，$G$ 中一积分曲线从 g_0 能到达 g. 由 $g \in G$ 的任意性知条件 1) 成立.　　证毕.

定理 2 和定理 3 表明，在一定条件下，系统(1) 在 x_0 点全局可控的充要条件是定理 2 中的条件 1) 和条件 2) 成立.

4 结　论

本文中的几个定理表明，对于可解的具有广义对称性的非线性系统，若考虑其可控性，在一定条件下，只需分析同构分解后的两个较低维的子系统的可控性，而后者往往容易得多.

参 考 文 献

[1] 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似性结构. 控制理论与应用，1994，11(2)：231—237

[2] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I.. The Structure of Nonlinear Control Systems Possessing Symmetries. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(3): 248—257

[3] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I.. Optimal Control of Systems Possessing Symmetries. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(11): 1037—1040

[4] Schaft, A. J. Van der. On Symmetries in Optimal. In Proc. of 25th CDC, 1986, 482—486

[5] Schaft, A. J. Van der. Stochastic Realization of Spcial Density Martice Which May Possess Symmetries. In Proc. of 23th CDC, 1984, 1484—1487

[6] Lewis, J. and Martin, C.. Linear Quadratic Optimal Control for Symmetric Systems. In Proc. of 22th CDC, 1983, 907—909

[7] 赵军,张嗣瀛. 非线性控制系统的广义对称性与可控性. 科学通报,1991,36(18):1428—1430

Isomorphic Decompositon and Controllability of Systems Possessing Solvable General Symmetries

JING Yuanwei, HU Sanqing, LIU Xiaoping and ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: The paper dealt with problems on isomorphic decomposition and controllability of a class of nonlinear systems possessing general symmetries. First, a concept called solvable systems of general symmetries was given. And then the isomorphic decomposition formations of these systems were drawn. The proposed formations are based on quotient systems. Finally, it has been shown that controllability of the former system, under certain conditions, can be determined by the later system being obtained through isomorphic decomposition. And a corresponding sufficient and necesary condition was given.

Key words: general symmetries; isomorphic decomposition; solvable; controllability

本文作者简介

井元伟 1956 年生. 1981 年毕业于辽宁大学数学系,获理学学士学位. 同年考入东北大学自动控制系,从事自动控制理论及应用领域的研究. 分别于 1984 年和 1988 年在东北大学自动控制系获工学硕士学位和工学博士学位. 现为东北大学自动控制系副教授,控制理论教研室副主任,实验室主任. 辽宁省系统工程学会理事. 主要研究方向为复杂系统控制结构及协调控制与全息控制. 已发表学术论文近 50 篇.

胡三清 1968 年生. 1992 年在湖南师范大学数学系获理学学士位. 现在东北大学自动控制系攻读硕士学位. 研究方向为复杂控制结构及对称性与相似性的研究. 现已发表论文数篇.

刘晓平 见本刊 1996 年第 1 期第 69 页.

张嗣瀛 见本刊 1996 年第 1 期第 69 页.