第 13 卷第 3 期
1996 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 3
Jun., 1996

测度型时变区间脉冲大系统的稳定性*

关治洪　温香彩　刘永清
(华南理工大学自动化系·广州,510641)

摘要:本文首次提出并研究了测度型线性时变区间脉冲大系统的稳定性问题. 利用比较原理等方法,借助于线性时变和线性定常无脉冲系统的稳定性,建立了相应的线性时变区间脉冲大系统的全局指数稳定性判据.

关键词:区间脉冲大系统;稳定性;向量比较原理

1 引　言

测度型脉冲系统是刻划脉冲与瞬动现象而不同于传统的连续型和离散型系统的一种有力工具,它在生态、物理、柔性机器人、神经网络、最优控制、管理、经济等领域具有广泛的应用[1,2]. 近年来,关于测度型脉冲系统的研究已取得一定的成果[3~9].

如所周知,用一个数学模型来描述一个实际动态系统总是近似的. 如测量误差,计算上的舍入误差等. 所以严格地说,每个参数都有一定的变化域,有些参数甚至是无法测定的. 这类问题抽象成数学问题便是所谓的区间动力系统. 区间动力系统在不确定的动力系统的鲁棒控制方面亦有重要应用. 迄今为止,对区间动力系统的稳定性已有一定的研究[10,11],但对于区间脉冲动力系统的稳定性研究尚不多见.

本文借助于向量比较原理等方法,讨论了测度型线性时变区间脉冲大系统的稳定性. 在节 2 中给出了有关预备知识,在节 3 中建立了若干稳定性判据,并在节 4 中给出了算例.

2 预备知识

对 $X=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)$, $Y=\mathrm{col}(y_1,\cdots,y_n)\in \mathrm{R}^n$, 取 $\|X\|=\|X\|_2=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $|X|\triangleq \mathrm{col}(|x_1|,\cdots,|x_n|)$, $X\leqslant Y$ 即 $x_i\leqslant y_i$, $(i=1,\cdots,n)$. 对应地,对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\|A\|=\|A\|_2=\max_i\sqrt{\lambda_i(A^{\mathrm{T}}A)}$, $|A|\triangleq(|a_{ij}|)_{n\times n}$, $A\leqslant B$ 等价于 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$, $i,j=1,\cdots,n$.

考虑测度型时变区间脉冲大系统

$$Dx_i=\sum_{j=1}^{r}N[P_{ij}(t),Q_{ij}(t)]x_j(t)Du_j,\quad i=1,\cdots,r. \tag{2.1}$$

其中 $x_i\in \mathrm{R}^{n_i}$, $P_{ij}(t)=(p_{ms}^{(ij)}(t))_{n_i\times n_j}$, $Q_{ij}(t)=(q_{ms}^{(ij)}(t))_{n_i\times n_j}\in \mathrm{R}^{n_i\times n_j}$ 在 $t\geqslant t_0(t_0\geqslant 0)$ 上连续.

---

* 中国博士后、广东省博士后科学基金和华南理工大学自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 4 月 3 日收到. 1995 年 10 月 11 日收到修改稿.

$$N[P_{ij}(t),Q_{ij}(t)] \triangleq \{A_{ij}(t) = (a_{ms}^{(ij)}(t))_{n_i\times n_j} | P_{ij}(t) \leqslant A_{ij}(t) \leqslant Q_{ij}(t),$$
$$\text{即 } p_{ms}^{(ij)}(t) \leqslant a_{ms}^{(ij)}(t) \leqslant q_{ms}^{(ij)}(t), A_{ij}(t) \text{ 在 } t \geqslant t_0 \text{ 上连续}\}.$$

Dx_i 和 Du_i 分别表示 x_i 和 u_i 的分布导数，$u_i: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ 为右连续且在 $J = [t_0, +\infty]$ 的每一紧集上为有界变差函数，$i, j = 1, \cdots r$，$\sum_{j=1}^{r} n_j = n$.

易见，系统(2.1)的右端在 u_i 的不连续点出现脉冲干扰，相应的解在该时刻瞬动.

不失一般性，可取

$$u_i(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} H_k(t). \tag{2.2}$$

其中不连续点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots, (t_1 > t_0)$，且当 $k \to +\infty$ 时，$t_k \to +\infty$，α_{ik} 为常数，$H_k(t)$ 为 Heaviside 函数，即

$$H_k(t) = \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ 1, & t \geqslant t_k. \end{cases} \tag{2.3}$$

定义 2.1 若对任意给定的矩阵 $A_{ij}(t) \in N[P_{ij}(t), Q_{ij}(t)]$，时变脉冲大系统

$$Dx_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij}(t) x_j(t) Du_j, \quad i = 1, \cdots, r \tag{2.4}$$

的零解是全局指数稳定的，则称时变区间脉冲大系统(2.1)是全局指数稳定的.

记
$$\overline{A}(t) \triangleq (\overline{A}_{ij}(t))_{r\times r}. \tag{2.5}$$
其中
$$\overline{A}_{ij}(t) \triangleq (\overline{a}_{ms}^{(ij)}(t))_{n_i\times n_j}, \quad i, j = 1 \cdots, r. \tag{2.6}$$
而
$$\begin{aligned} &\overline{a}_{mm}^{(ii)}(t) = q_{mm}^{(ii)}(t), \quad \overline{a}_{ms}^{(ii)}(t) = \max\{|p_{ms}^{(ii)}(t)|, |q_{ms}^{(ii)}(t)|\}, \\ &(m \neq s), \quad m, s = 1, \cdots, n_i, \quad i = 1, \cdots, r; \end{aligned} \tag{2.7}$$
$$\begin{aligned} &\overline{a}_{ms}^{(ij)}(t) = \max\{|p_{ms}^{(ij)}(t)|, |q_{ms}^{(ij)}(t)|\}, \quad (i \neq j) \\ &m = 1, \cdots, n_i, \quad s = 1, \cdots, n_j, \quad i, j = 1, \cdots, r. \end{aligned} \tag{2.8}$$

对于线性时变系统

$$Z'(t) = \overline{A}(t) Z(t) \tag{2.9}$$

给出具有衰减度 α 稳定性的定义.

定义 2.2 设 $\alpha > 0$ 为常数，若存在正常数 M 使得系统(2.9)的解 $Z(t, t_0, Z_0)$ 满足

$$\| Z(t, t_0, Z_0) \| \leqslant M \| Z_0 \| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{2.10}$$

则称系统(2.9)是具有衰减度 α 稳定的.

在下文中我们要用到引理 2.1.

引理 2.1[11] 设 n 维向量函数 $\varphi(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上连续，右导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)$ 满足微分不等式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) \leqslant F(t, \varphi(t))$，$\varphi(t_0) = \zeta$，其中 $F(t, Y)$ 是在含曲线 $Y = \varphi(t)(t_0 \leqslant t < b)$ 的某区域 $G \subset J \times \mathrm{R}^n$ 内定义的连续向量函数，且关于 y 拟单调不减。又 $Y = \Psi(t)$ 是在 $t_0 \leqslant t < b$ 上满足微分方程组 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(t, Y)$，$Y(t_0) = \zeta$ 的最大右行解，则有 $\varphi(t) \leqslant \Psi(t)$，$t_0 \leqslant t < b$.

3 稳定性结果

下面讨论区间脉冲大系统(2.1)的稳定性.

对于任意 $A_{ij}(t)\in N[P_{ij}(t),Q_{ij}(t)]$,记

$$A_{ij}^{(0)}(t)=\frac{1}{2}(P_{ij}(t)+Q_{ij}(t)),\tag{3.1}$$

$$\Delta A_{ij}(t)=\left(\frac{1}{2}\zeta_{ms}(q_{ms}^{(ij)}(t)-p_{ms}^{(ij)}(t))\right)_{n_i\times n_j}.\tag{3.2}$$

其中 $\zeta_{ms}\in[-1,1]$,则

$$A_{ij}(t)=A_{ij}^{(0)}(t)+\Delta A_{ij}(t),\tag{3.3}$$

且

$$\begin{aligned}|\Delta A_{ij}(t)|&\leqslant\left(\frac{1}{2}(q_{ms}^{(ij)}(t)-p_{ms}^{(ij)}(t))\right)_{n_i\times n_j}\\&=\frac{1}{2}(Q_{ij}(t)-P_{ij}(t))\\&\triangleq\Delta A_{ij}^{(m)}(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

再引入记号

$$\Delta A_k^{(m)}(t)=\left(\Delta A_{ij}^{(m)}(t)|\alpha_{jk}|\right)_{r\times r}.\tag{3.5}$$

其中 $\Delta A_{ij}^{(m)}(t)$ 和 α_{jk} 分别由(3.4)和(2.2)式给出;

$$B_k(t)=\begin{bmatrix}I_1-A_{11}^{(0)}(t)\alpha_{1k}&-A_{12}^{(0)}(t)\alpha_{2k}&\cdots&-A_{1r}^{(0)}(t)\alpha_{rk}\\-A_{21}^{(0)}(t)\alpha_{1k}&I_2-A_{22}^{(0)}(t)\alpha_{2k}&\cdots&-A_{2r}^{(0)}(t)\alpha_{rk}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-A_{r1}^{(0)}(t)\alpha_{1k}&-A_{r2}^{(0)}(t)\alpha_{2k}&\cdots&I_r-A_{rr}^{(0)}(t)\alpha_{rk}\end{bmatrix}.\tag{3.6}$$

式中 $A_{ij}^{(0)}(t)$ 和 α_{jk} 分别由(3.1)和(2.2)式给出,而 I_i 为 n_i 阶单位矩阵;

$$\beta_k=\frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(B_k^{\mathrm T}(t_k)B_k(t_k))-\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|}.\tag{3.7}$$

则有下述定理.

定理 3.1 对于区间脉冲大系统(2.1),若

i) $\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(B_k^{\mathrm T}(t_k)B_k(t_k))-\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|>0,\ k\in N$(自然数集);

ii) 系统(2.9)是具有衰减度 α 稳定的,则有结论:

a) 当 $M^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}\beta_i\leqslant C=\text{const}(k\in N)$ 时,系统(2.1)是全局指数稳定的;

b) 当 $\beta_k\leqslant C=\text{const}$,且 $MC\geqslant 1,t_k-t_{k-1}\geqslant\delta>0(K\in N)$ 时,$\dfrac{\ln(CM)}{\delta}-\alpha<0$ 蕴涵系统(2.1)全局指数稳定.其中 M 由(2.10)式确定.

证 对任意 $A_{ij}(t)\in N(P_{ij}(t),Q_{ij}(t))$,考虑系统

$$Dx_i=\sum_{j=1}^{r}A_{ij}(t)x_j(t)Du_j,\quad i=1,\cdots,r.\tag{3.8}$$

由于 u'_i 在 $[t_{k-1},t_k)$ 上存在,据(2.2)式知,当 $t\in[t_{k-1},t_k)$ 时,(3.8)式成为

$$x'_i(t)=\sum_{j=1}^{r}A_{ij}(t)x_j(t),\quad i=1,\cdots,r,\quad t\in[t_{k-1},t_k).$$

注意到 $A_{ii}(t)=C_{ii}(t)+(A_{ii}(t)-C_{ii}(t))$，其中 $C_{ii}(t)=\mathrm{diag}\left(a_{11}^{(ii)}(t),\cdots,a_{n_in_i}^{(ii)}(t)\right)$，则

$$x_i(t)=\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t}C_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)x_i(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}C_{ii}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)[A_{ii}(\tau)-C_{ii}(\tau)]x_i(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_{k-1}}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}C_{ii}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{r}A_{ij}(\tau)x_j(\tau)\right]\mathrm{d}\tau,\quad t\in[t_{k-1},t_k). \tag{3.9}$$

由于

$$C_{ii}(t)\leqslant\overline{C}_{ii}(t),\quad |A_{ii}(t)-C_{ii}(t)|\leqslant\overline{A}_{ii}(t)-\overline{C}_{ii}(t),$$
$$A_{ij}(t)\leqslant\overline{A}_{ij}(t),\quad (j\neq i). \tag{3.10}$$

其中 $\overline{A}_{ij}(t)$ 由(2.6)式给出，而 $\overline{C}_{ii}(t)=\mathrm{diag}\left(q_{11}^{(ii)}(t),\cdots,q_{n_in_i}^{(ii)}(t)\right)$，于是由(3.9)和(3.10)式知

$$|x_i(t)|\leqslant\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t}\overline{C}_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)|x_i(t_{k-1})|+\int_{t_{k-1}}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}\overline{C}_{ii}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)[\overline{A}_{ii}(\tau)-\overline{C}_{ii}(\tau)]|x_i(\tau)|\mathrm{d}\tau+\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\exp\int_{\tau}^{t}\overline{C}_{ii}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\overline{A}_{ij}(\tau)|x_j(\tau)|\right]\mathrm{d}\tau,\quad t\in[t_{k-1}-t_k). \tag{3.11}$$

记　$y_i(t)$

$$=\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t}\overline{C}_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)|x_i(t_{k-1})|+\int_{t_{k-1}}^{t}\exp\int_{\tau}^{t}\overline{C}_{ii}(\zeta)d\zeta[\overline{A}_{ii}(\tau)-\overline{C}_{ii}(\tau)]|x_i(\tau)|\mathrm{d}\tau+\int_{t_{k-1}}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}\overline{C}_{ii}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\overline{A}_{ij}(\tau)|x_j(\tau)|\right]\mathrm{d}\tau,\ t\in[t_{k-1},t_k). \tag{3.12}$$

则 $y_i(t)$ 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上连续可微，再注意到(3.11)式有

$$y_i'(t)=\overline{C}_{ii}(t)y_i(t)+[\overline{A}_{ii}(t)-\overline{C}_{ii}(t)]|x_i(t)|+\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\overline{A}_{ij}(t)|x_j(t)|$$
$$\leqslant\overline{C}_{ii}(t)y_i(t)+[\overline{A}_{ii}(t)-\overline{C}_{ii}(t)]y_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\overline{A}_{ij}(t)y_j(t)$$
$$=\overline{A}_{ii}(t)y_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\overline{A}_{ij}(t)y_j(t),$$

即

$$Y'(t)\leqslant\overline{A}(t)Y(t),\quad t\in[t_{k-1},t_k). \tag{3.13}$$

其中 $\overline{A}(t)$ 如(2.5)式定义. 由于 $F(t,Y)\triangleq\overline{A}(t)Y$ 关于 Y 拟单调不减，对(3.13)和(2.9)式在 $[t_{k-1},t_k)$ 上应用引理 2.1 得

$$Y(t)\leqslant Z(t),\quad t\in[t_{k-1},\quad t_k). \tag{3.14}$$

其中 $Z(t)$ 是系统(2.9)以 $Z(t_{k-1})=|X(t_{k-1})|$ 为初值的唯一解. 综合(3.11)，(3.12)和(3.14)式得

$$|X(t)|\leqslant Y(t)\leqslant Z(t),\quad t\in[t_{k-1},t_k).$$

再注意到定理条件 ii)，有

$$\|X(t)\|\leqslant\|Z(t)\|\leqslant M\|X(t_{k-1})\|\exp(-\alpha(t-t_{k-1})),\quad t\in[t_{k-1},t_k), \tag{3.15}$$

进而

$$\|X(t_k-)\|\leqslant M\|X(t_{k-1})\|\exp(-\alpha(t_k-t_{k-1})). \tag{3.16}$$

另一方面，由系统(3.8)式知

$$x_i(t_k,t_0,X_0)-x_i(t_{k-h},t_0,X_0)=\int_{t_{k-h}}^{t_k}\sum_{j=1}^{r}A_{ij}(\tau)x_j(\tau)\mathrm{d}u_j(\tau).$$

其中 $h>0$ 为充分小的正数. 今 $h\to 0^+$,则

$$x_i(t_k,t_0,X_0)-x_i(t_k-,t_0,X_0)=\sum_{j=1}^{r}A_{ij}(t_k)x_j(t_k)\alpha_{jk},$$

注意到(3.3)式,有

$$x_i(t_k,t_0,X_0)-x_i(t_k-,t_0,X_0)=\sum_{j=1}^{r}[A_{ij}^{(0)}(t_k)+\Delta A_{ij}(t_k)]x_j(t_k)\alpha_{jk}$$

或

$$B_k(t_k)X(t_k)-X(t_k-)=\Delta A_k(t_k)X(t_k) \tag{3.17}$$

其中 $B_k(t)$ 由(3.6)式给出,而 $\Delta A_k(t)\triangleq(\Delta A_{ij}(t)\alpha_{jk})_{r\times r}$.

由于

$$\|\Delta A_k(t_k)X(t_k)\|\leqslant\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|\,\|X(t_k)\|. \tag{3.18}$$

其中 $\Delta A_k^{(m)}(t)$ 由(3.5)式给出,而

$$\begin{aligned}&\|B_k(t_k)X(t_k)-X(t_k-)\|\\&\geqslant\|B_k(t_k)X(t_k)\|-\|X(t_k-)\|\\&\geqslant\lambda_{\min}^{\frac12}(B_k^{\mathrm{T}}(t_k)B_k(t_k))\,\|X(t_k)\|-\|X(t_k-)\|,\end{aligned} \tag{3.19}$$

故结合(3.17)~(3.19)式并注意到 $\lambda_{\min}^{\frac12}(B_k^{\mathrm{T}}(t_k)B_k(t_k))-\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|>0$,

则有

$$\|X(t_k)\|\leqslant\beta_k\|X(t_k-)\|. \tag{3.20}$$

其中 β_k 由(3.7)式给出.

综合(3.15),(3.16)和(3.20)式,由递推可知当 $t\in[t_{k-1},t_k)$ 时

$$\|X(t)\|\leqslant MM^{k-1}\beta_{k-1}\cdots\beta_1\|X(t_0)\|\exp[-\alpha(t-t_0)]. \tag{3.21}$$

a)当 $M_{k-1}\beta_{k-1}\cdots\beta_1\leqslant C=\mathrm{const}\,(k\in N)$ 时,由(3.21)式知

$$\|X(t)\|\leqslant MC\|X(t_0)\|\exp[-\alpha(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0. \tag{3.22}$$

注意到 $\alpha>0$,故(3.22)式表明系统(3.8)的零解全局指数稳定,从而区间脉冲大系统(2.1)全局指数稳定.

b)当 $\beta_k\leqslant C=\mathrm{const}$,且 $MC\geqslant 1$, $t_k-t_{k-1}\geqslant\delta>0\,(k\in N)$ 时,

$$\begin{aligned}M_{k-1}\beta_{k-1}\cdots\beta_1&\leqslant(CM)^{k-1}\leqslant\exp\Big[\frac{\ln(CM)}{\delta}(t_{k-1}-t_0)\Big]\\&\leqslant\exp\Big[\frac{\ln(CM)}{\delta}(t-t_0)\Big],\quad t\in t_{k-1},t_k).\end{aligned}$$

再由(3.21)式得

$$\|X(t)\|\leqslant M\|X(t_0)\|\exp\Big[\Big(\frac{\ln(CM)}{\delta}-\alpha\Big)(t-t_0)\Big],\quad t\geqslant t_0. \tag{3.23}$$

上式表明 $\frac{\ln(CM)}{\delta}-\alpha<0$ 蕴涵系统(3.8)中的零解全局指数稳定,从而区间脉冲大系统(2.1)全局指数稳定. 证毕.

在定理3.1中,当 $B_k(t_k)$ 可逆时,由(3.17)式得

$$X(t_k)=B_k^{-1}(t_k)[X(t_k-)+\Delta A_k(t_k)X(t_k)],$$

进而

$$\|X(t_k)\|\leqslant\|B_k^{-1}(t_k)\|[\|X(t_k-)\|+\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|\,\|X(t_k)\|].$$

若设 $\| B_k^{-1}(t_k) \| \ \| \Delta A_k^{(m)}(t_k) \| < 1$，则

$$\| X(t_k) \| \leqslant \frac{\| B_k^{-1}(t_k) \|}{1 - \| B_k^{-1}(t_k) \| \ \| \Delta A_k^{(m)}(t_k) \|} \| X(t_k -) \|,$$

于是可得如下推论.

推论 3.1　对于区间脉冲大系统(2.1)，若

i) $B_k(t_k)$可逆，且$\| B_k^{-1}(t_k) \| \ \| \Delta A_k^{(m)}(t_k) \| < 1, k \in N$；

ii) 系统(2.9)是具有衰减度 α 稳定的，则定理 3.1 结论成立. 这里 β_k 取为 $\| B_k^{-1}(t_k) \| \cdot \left(\frac{1}{1 - \| B_k^{-1}(t_k) \| \ \| \Delta A_k^{(m)}(t_k) \|} \right)$，而其余参数与定理 3.1 相同.

注 3.1　推论 3.1 中的范数 $\| \cdot \|$ 可取为 $R^{n \times n}$ 中的任意范数.

在定理 3.1 中，要对线性时变系统(2.9)的稳定性进行判断. 为应用上的方便，可用相应的定常系统的稳定性代替. 记

$$\overline{A} = (\overline{A}_{ij})_{r \times r}, \tag{3.24}$$

其中

$$\overline{A}_{ij} \triangleq \left(\overline{a}_{ms}^{(ij)} \right)_{n_i \times n_j}, \tag{3.25}$$

而

$$\overline{a}_{mm}^{(ii)} = \sup_{t \geqslant t_0} \{ q_{mm}^{(ii)}(t) \}, \quad \overline{a}_{ms}^{(ii)} = \sup_{t \geqslant t_0} \max \{ | p_{ms}^{(ii)}(t) |, | q_{ms}^{(ii)}(t) | \}, \quad (m \neq s),$$

$$\overline{a}_{ms}^{(ij)} = \sup_{t \geqslant t_0} \max \{ | p_{ms}^{(ij)}(t) |, | q_{ms}^{(ij)}(t) | \}, \quad j \neq i.$$

在定理 3.1 的推证中，用不等式

$$C_{ii}(t) \leqslant \overline{C}_{ii}, \quad | A_{ii}(t) - C_{ii}(t) | \leqslant \overline{A}_{ii} - \overline{C}_{ii}, \quad A_{ij}(t) \leqslant \overline{A}_{ij} \tag{3.26}$$

代替(3.10)，这里 $\overline{C}_{ii} = \mathrm{diag}(\overline{a}_{11}^{(ii)} \cdots, \overline{a}_{(n_i n_i)}^{(ii)})$，用定常系统

$$Z'(t) = \overline{A} Z(t) \tag{3.27}$$

代替时变系统(2.9)，并注意到系统(3.27)的解

$$Z(t) = \exp[\overline{A}(t - t_{k-1})] Z(t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k),$$

进而由 Coppel 不等式[12]得

$$\| Z(t) \| \leqslant \exp[\mu_2(\overline{A})(t - t_{k-1})] \| Z(t_{k-1}) \|, \quad t \in [t_{k-1}, t_k). \tag{3.28}$$

其中 $\mu_2(\overline{A})$为矩阵 $\overline{A}$ 相应于 $\| \cdot \|_2$ 的测度[12]，则可得类似于定理 3.1 的(3.15)式

$$\| X(t) \| \leqslant \| X(t_{k-1}) \| \exp[\mu_2(\overline{A})(t - t_{k-1})], \quad t \in [t_{k-1}, t_k). \tag{3.29}$$

再类似于定理 3.1 的其余推证，便得定理 3.2.

定理 3.2　对区间脉冲大系统(2.1)，若

i) $\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(B_k^{\mathrm{T}}(t_k) B_k(t_k)) - \| \Delta A_k^{(m)}(t_k) \| > 0$；

ii) $\mu_2(\overline{A}) < 0$，

则有结论：

a) 当$\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i \leqslant C = \mathrm{const}(k \in N)$时，系统(2.1)全局指数稳定；

b) 当 $\beta_k \leqslant C = \mathrm{const}$，且 $C \geqslant 1, t_k - t_{k-1} \geqslant \delta > 0 (k \in N)$时，$\frac{\ln C}{\delta} + \mu_2(\overline{A}) < 0$ 蕴涵系统(2.1)全局指数稳定. 其中 $\Delta A_k^{(m)}(t), B_k(t), \beta_k$ 分别由(3.5)(3.6)和(3.7)式给出，而 $\overline{A}$ 由(3.

24)给出.

推论 3.2 对于区间脉冲大系统(2.1),若

i) $B_k(t_k)$可逆,且$\|B_k^{-1}(t_k)\|\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|<1, k\in N$;

ii) $\mu(\bar{A})<0$,

则定理 3.2 结论成立,这里 β_k 取为$\|B_k^{-1}(t_k)\|\left[\dfrac{1}{1-\|B_k^{-1}(t_k)\|\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|}\right]$,而其余参数与定理 3.2 同.

注 3.2 推论 3.2 中范数$\|\cdot\|$为$R^{n\times n}$中任意范数,而$\mu(\bar{A})$则为该范数所诱导的$\bar{A}$的测度.

4 例 子

考虑四维区间脉冲系统

$$\begin{cases}Dx_1 = N[P_{11}(t),Q_{11}(t)]x_1Du_1 + N[P_{12}(t),Q_{12}(t)]x_2Du_2,\\ Dx_2 = N[P_{21}(t),Q_{21}(t)]x_1Du_1 + N[P_{22}(t),Q_{22}(t)]x_2Du_2.\end{cases} \tag{4.1}$$

其中
$$(P_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -3-\dfrac{\sin t}{2} & -2\dfrac{\cos^2 t}{3} \\ -\dfrac{\sin^2 t}{2} & -4-\dfrac{\cos t}{3}\end{bmatrix},$$

$$(Q_{ij}(t))_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -2+\dfrac{\sin t}{2} & 1+\dfrac{2\cos^2 t}{3} \\ \dfrac{\sin^2 t}{2} & -3+\dfrac{\cos t}{3}\end{bmatrix},$$

$x_i\in R^2, X=\mathrm{col}(x_1,x_2)\in R^4, u_i(t)$如(2.2)式定义,其中$\alpha_{1k}=k\sin^2 t_k, \alpha_{2k}=(k+\frac{1}{4})\sin^2 t_k$,易见$\alpha_{2k}\geqslant\alpha_{1k}\geqslant 0$.

下面验证系统(4.1)满足推论 3.2 的条件,取范数$\|\cdot\|=\|\cdot\|_1$.

容易计算得到$\bar{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{3}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{8}{3}\end{bmatrix}$,且$\mu_1(\bar{A})=-1<0$,即条件 ii) 成立;又

$$B_k(t_k)=\begin{bmatrix}1+\dfrac{5}{2}\alpha_{1k} & -\dfrac{1}{2}\alpha_{2k}\\ 0 & 1+\dfrac{7}{2}\alpha_{2k}\end{bmatrix},$$

易见
$$B_k^{-1}(t_k)=\frac{1}{(1+\frac{5}{2}\alpha_{1k})(1+\frac{7}{2}\alpha_{2k})}\begin{bmatrix}1+\dfrac{7}{2}\alpha_{2k} & \dfrac{1}{2}\alpha_{2k}\\ 0 & 1+\dfrac{5}{2}\alpha_{1k}\end{bmatrix},$$

且
$$\|B_k^{-1}(t_k)\|=\frac{1}{(1+\frac{5}{2}\alpha_{1k})(1+\frac{7}{2}\alpha_{2k})}\max\left\{1+\frac{7}{2}\alpha_{2k},\frac{1}{2}\alpha_{2k}+1+\frac{5}{2}\alpha_{1k}\right\}$$
$$\leqslant\frac{2}{2+5\alpha_{1k}},$$

$$\Delta A_k^{(m)}(t_k)=(\Delta A_{ij}^{(m)}(t_k)|\alpha_{jk}|)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1+\sin t_k)|\alpha_{1k}| & (1+\frac{4}{3}\cos^2 t_k)|\alpha_{2k}| \\ (\sin^2 t_k)|\alpha_{1k}| & (1+\frac{2}{3}\cos t_k)|\alpha_{2k}|\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|\\&=\frac{1}{2}\max\{[|(1+\sin t_k)|+\sin^2 t_k]\alpha_{1k},[1+\frac{4}{3}\cos^2 t_k+|(1+\frac{2}{3}\cos t_k)|]\alpha_{2k}\}\\&\leqslant\frac{1}{2}\max\{3\alpha_{1k},4\alpha_{2k}\}=2\alpha_{2k}.\end{aligned}$$

于是 $$\|B_k^{-1}(t_k)\|\,\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|\leqslant\frac{4\alpha_{2k}}{2+5\alpha_{1k}}<1,$$

即条件 i) 成立. 又

$$\beta_k=\frac{\|B_k^{-1}(t_k)\|}{1-\|B_k^{-1}(t_k)\|\,\|\Delta A_k^{(m)}(t_k)\|}\leqslant\frac{2}{2+5\alpha_{1k}-4\alpha_{2k}}\leqslant 1,$$

进而 $\prod_{i=1}^{k-1}\beta_i\leqslant 1$，故推论 3.2 结论 a)成立，即系统(4.1)全局指数稳定.

5 结束语

本文借助于向量比较原理等方法首次研究了测度型线性时变区间脉冲大系统的全局指数稳定性. 定理和例子表明，在一定的条件下，由无脉冲的比较系统的 α 稳定性可以得到相应区间脉冲大系统的全局指数稳定性.

参 考 文 献

[1] Deo, S. G. and Pandit, S. G.. Differential Systems Involving Impulses. Springer-Verlag, 1982

[2] 徐远通. 泛函微分方程与测度微分方程. 广州:中山大学出版社, 1988

[3] Guan Zhihong, Liu Yongqing and Wen Xiangcai. Decentralized Stabilization of Singular Time-Delay Large Scale Control Systems with Impulsive Solutions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, AC-40(8): 1437—1441

[4] Liu Yongqing, Guan Zhihong and Wen Xiangcai. The Application of Auxiliary Simultaneous Equations to Problem in the Stabilization of Singular and Impulsive Large Scale Systems. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1995, 42(1): 46—51

[5] Guan Zhihong and Liu Yongqing. The Stability Properties of Nonlinear Measure Large Scale Systems with Impulse Effect. Int. J. Computers and Math. Appl., 1994, 28(9): 89—99

[6] Guan Zhihong et al.. Variation of the Parameters Formula and the Proplem of BIBO for Singular Measure Differential Systems with Impulse Effect. Applied Math. and Computations, 1994, 60(2,3): 153—169

[7] Guan Zhihong and Liu Yongqing. Integral Inequalities of Gronwall-Bellman Type for Multi-distributions. J. Math. Anal. Appl., 1994, 183(1): 63—75

[8] Guan Zhihong and Liu Yongqing. Vector Comparison Principle for the Stability of Measure Differential Large Scale Systems. Ann. of Diff. Eqs., 1994, 10(2): 143—152

[9] Guan Zhihong and Liu Yongqing. Stability Analysis of Nonlinear Measure Large Scale Systems. J. Syst. Science and Syst. Eng., 1993, 2(2): 134—142

[10] 刘永清, 唐功友. 大型动力系统的理论与应用. 卷 3, 广州: 华南理工大学出版社, 1992

[11] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988

[12] Coppel, W. A.. Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations. Boston: D. C. Heath, 1995

Stability of Measure Time-Varying Large Scale Interval Systems with Impulse Effect

GUAN Zhihong , WEN Xiangcai and LIU Yongqing

(Department of Automation, South China university of Technology · Guangzhou,510641,PRC)

Abstract: The proplem of stability for measure linear time-varying large scale interval systems with impulse effect which has not been studied up to now is introduced and studied. Some explicit criteria of exponential stability in the large for such systems are established based on vector comparison theorem. An example is given to illustrate the effectiveness of results obtained.

Key words: interval impulsive large scale systems; stability; vector comparison theorem

本文作者简介

关治洪 1955年生.教授,博士.1994年进入华南理工大学"电子学与通信"博士后流动站.研究兴趣为脉冲系统、时滞系统、广义系统及神经网络系统理论.

温香彩 1964年生.博士.1995年进入华南理工大学"电子与通信"博士后流动站.研究兴趣为离散系统、广义系统的稳定、控制与混沌.

刘永清 见本刊1996年第1期第35页.