第 13 卷第 3 期 控制理论与应用 Vol. 13, No. 3
1996 年 6 月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Jun., 1996

一类不确定线性系统鲁棒状态估计器设计*

朱纪洪 郭 治
(南京航空航天大学自动控制系・南京,210016) (南京理工大学自动控制系・南京,210094)

摘要:本文对一类不确定线性系统给出了一种鲁棒状态估计器设计方法.其主要思想是对允许的系统扰动,通过设计估计器参数矩阵使增广系统的极点位于左半复平面指定圆形区内或指定直线的左侧,且稳态误差协方差阵不超过给定上限.给出了鲁棒估计器存在条件及其解的一般表达式.

关键词:线性不确定系统;鲁棒状态估计器;圆形区域极点配置;误差协方差配置

1 引 言

协方差配置是八十年代中后期新发展起来的控制理论与系统设计方法[1].在近十年左右的时间里,人们在把协方差配置用于系统控制器设计及模型简化方面做了大量的工作,出现了许多理论成果和应用实例.如为把暂态指标考虑到控制器设计中,文[2]提出了指定闭环极点的协方差配置;文献[3]则把协方差配置与 H_∞ 鲁棒控制相结合给出了混合设计方法.尽管如此协方差配置在状态估计方面的结果却并不多,正如[4]中所阐述的那样,协方差配置的理论与方法在控制和估计这两个问题上并无明显的对偶关系. Kalman 滤波虽然是一种最优滤波,但就系统总体设计特别是误差如何合理分配来说却不一定是最佳的,如防空系统空域窗的选取问题.因此,研究基于协方差配置的状态估计器不但具有理论意义而且具有工程应用价值.

2 问题描述

考虑下述连续不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + v(t). \tag{2.1}$$

测量方程是

$$y(t) = (C + \Delta C)x(t) + w(t). \tag{2.2}$$

其中状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 具有初始条件 $x(0)$ 和协方差 $X_s(0)$,测量输出 $y(t) \in \mathbb{R}^p$,$v(t)$ 和 $w(t)$ 为不相关高斯白噪声,谱密度分别为 $V, W > 0$,$A, \Delta A, C, \Delta C$ 为适维矩阵.本文所研究的不确定性 $\Delta A, \Delta C$ 具有如下结构

$$\Delta A = G_1 \Sigma H, \quad \Delta C = G_2 \Sigma H. \tag{2.3}$$

其中 G_1, G_2, H 为定常矩阵,Σ 为非时变不确定矩阵,满足

$$\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} \leqslant I. \tag{2.4}$$

本文所研究的状态估计器结构如下

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + Ky(t). \tag{2.5}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于 1994 年 9 月 21 日收到. 1995 年 8 月 11 日收到修改稿.

本文所研究的状态估计器结构如下

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + Ky(t). \tag{2.5}$$

于是估计误差为

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{2.6}$$

由式(2.1)、(2.2)、(2.5)及(2.6)可得

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e(t) + [(A - \hat{A} - KC) + (\Delta A - K\Delta C)]x(t) + v(t) - Kw(t). \tag{2.7}$$

定义

$$x_e \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - \hat{A} - KC & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} \triangleq \begin{bmatrix} G_1 \\ G_1 - KG_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} \triangleq [H \quad 0], \quad \Delta\bar{A} \triangleq \bar{G}\Sigma\bar{H},$$

则增广系统为

$$\dot{x}_e = [\bar{A} + \Delta\bar{A}]x_e(t) + \bar{v}(t). \tag{2.8}$$

其中 $\bar{v}(t)$ 代表协方差为 $\bar{V} \triangleq \begin{bmatrix} V & V \\ V & V + KWK^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 的零均值不相关白噪声过程．只要增广系统(2.8)稳定，其稳态状态协方差 $X \triangleq \begin{bmatrix} X_x & X_{xe} \\ X_{xe}^{\mathrm{T}} & X_e \end{bmatrix} = \lim\limits_{t\to\infty} E[(x_e - \bar{x}_e)(x_e - \bar{x}_e)^{\mathrm{T}}]$ 满足协方差 Lyapunov 方程

$$(\bar{A} + \Delta\bar{A})X + X(\bar{A} + \Delta\bar{A})^{\mathrm{T}} + \bar{V} = 0. \tag{2.9}$$

为使观测器具有优越的动态特性和稳态性能，要求确定参数矩阵 $\hat{A}$ 和 K，使得

1) $\lambda(\bar{A} + \Delta\bar{A}) \subset \Omega(q,r)$，$\Omega(q,r)$ 为复平面上圆心位于 $(-q,0)$，半径为 r 的圆形区域，其中 $q > r > 0$.

2) $X_e < Q_2$，Q_2 为指定误差协方差上限．

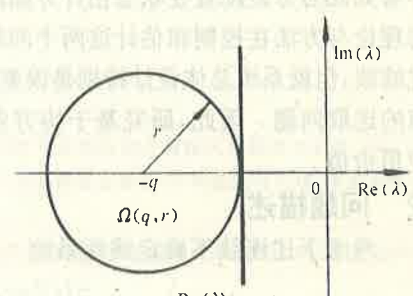

图 1　增广系统极点配置区

3　主要结果

引理 3.1　若 $\Delta A = G\Sigma H$，$\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} \leqslant I$，$\beta_1 > 0$，$\beta_2 > 0$ 使得 $\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}} > 0$，那么

$$\Delta AQ + Q\Delta A^{\mathrm{T}} \leqslant \beta_1 GG^{\mathrm{T}} + \frac{QH^{\mathrm{T}}HQ}{\beta_1}, \tag{3.1}$$

$$(A + \Delta A)Q(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} \leqslant A(Q^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A^{\mathrm{T}} + \beta_2 GG^{\mathrm{T}}. \tag{3.2}$$

证

$$\begin{aligned} \Delta AQ + Q\Delta A^{\mathrm{T}} &= G\Sigma HQ + Q(G\Sigma H)^{\mathrm{T}} = G\Sigma HQ + QH^{\mathrm{T}}(G\Sigma)^{\mathrm{T}} \\ &\leqslant \beta_1 G\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} + \frac{QH^{\mathrm{T}}HQ}{\beta_1} \leqslant \beta_1 GG^{\mathrm{T}} + \frac{QH^{\mathrm{T}}HQ}{\beta_1}. \end{aligned}$$

令 $Y = AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1/2} - G\Sigma(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{1/2}$，则

$$\begin{aligned} YY^{\mathrm{T}} &= AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} - AQH^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} - G\Sigma HQA^{\mathrm{T}} \\ &\quad + G\Sigma(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} \\ &= AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} + \beta_2 G\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} - (AQ\Delta A^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \Delta AQA^{\mathrm{T}} + \Delta AQ\Delta A^{\mathrm{T}}) \\
&= AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} + \beta_2 G\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} + AQA^{\mathrm{T}} \\
&\quad - (A+\Delta A)Q(A+\Delta A)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(A+\Delta A)Q(A+\Delta A)^{\mathrm{T}} \\
&= AQA^{\mathrm{T}} + AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} + \beta_2 G\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} - YY^{\mathrm{T}} \\
&\leqslant AQA^{\mathrm{T}} + AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} + \beta_2 G\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} \\
&\leqslant AQA^{\mathrm{T}} + AQH^{\mathrm{T}}(\beta_2 I - HQH^{\mathrm{T}})^{-1}HQA^{\mathrm{T}} + \beta_2 GG^{\mathrm{T}} \\
&= A(Q^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A^{\mathrm{T}} + \beta_2 GG^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

定理 3.1　定义 $\alpha \triangleq q - r$，$\overline{A}_\alpha \triangleq \overline{A} + \alpha I$，设 Q 为对称正定阵，如果存在正数 $\beta_1,\beta_2 > 0$ 且 $\beta_2 I - \overline{H}Q\overline{H}^{\mathrm{T}} > 0$，使得代数矩阵方程

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}_\alpha Q + Q\overline{A}_\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\overline{A}_\alpha(Q^{-1} - \beta_2^{-1}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H})^{-1}\overline{A}_\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{Q\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H}Q}{\beta_1} \\
&+ (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})\overline{G}\overline{G}^{\mathrm{T}} + \overline{V} = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

成立，那么 1) $\Lambda(\overline{A} + \Delta\overline{A}) \subset \Omega(q,r)$；2) $X < Q$.

证　根据引理 3.1，由方程(3.3)可得

$$
(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})Q + Q(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})Q(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})^{\mathrm{T}} + \overline{V} \leqslant 0. \tag{3.4}
$$

设 η^* 为 $\overline{A} + \Delta\overline{A}$ 的左特征向量，λ 为相应的特征根，$[\cdot]^*$ 表示共轭转置，对(3.4)式分别左乘 η^*、右乘 η 并整理得

$$
\left[(\lambda+\alpha) + (\bar{\lambda}+\alpha) + \frac{(\lambda+\alpha)(\bar{\lambda}+\alpha)}{r}\right]\eta^* Q\eta + \eta^*\overline{V}\eta \leqslant 0.
$$

因为 $\eta^* Q\eta > 0$，$\eta^*\overline{V}\eta \geqslant 0$，所以

$$
\lambda + \bar{\lambda} + 2\alpha + \frac{(\lambda+\alpha)(\bar{\lambda}+\alpha)}{r} \leqslant 0.
$$

令 $\lambda = x + jy$，同时把 $\alpha = q - r$ 代入上式整理得

$$
(x+q)^2 + y^2 \leqslant r^2.
$$

所以 $\Lambda(\overline{A} + \Delta\overline{A}) \subset \Omega(q,r)$. 把式(3.4)－式(2.9)可得

$$
(\overline{A} + \Delta\overline{A})(Q - X) + (Q - X)(\overline{A} + \Delta\overline{A})^{\mathrm{T}} + 2\alpha Q + \frac{1}{r}(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})Q(\overline{A}_\alpha + \Delta\overline{A})^{\mathrm{T}} \leqslant 0. \tag{3.5}
$$

显然由 Lyapunov 稳定性理论可知 $Q-X>0$，即 $X<Q$.

定义 3.1　如果状态估计器(2.5)使得 $\Lambda(\overline{A}+\Delta\overline{A})\subset\Omega(q,r)$ 则称之为不确定系统的 Ω 鲁棒状态估计器.

定理 3.2　如果存在 $\beta_1,\beta_2>0$ 和矩阵 $L\in \mathrm{R}^{n\times p}$ 使

1) 代数矩阵方程

$$
A_\alpha Q_1 + Q_1 A_\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}A_\alpha(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A_\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{Q_1 H^{\mathrm{T}}HQ_1}{\beta_1} + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1 G_1^{\mathrm{T}} + V = 0 \tag{3.6}
$$

存在正定解 Q_1,满足 $\beta_2 I - H^{\mathrm{T}}Q_1H > 0$;若 $\Pi \triangleq Q_1 + \frac{1}{r}(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A_a^{\mathrm{T}}$ 非奇异,定义

$$\widetilde{A} \triangleq A + \left[V + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]\Pi^{-1}, \quad \widetilde{A}_a \triangleq \widetilde{A} + \alpha I,$$

$$\widetilde{C} \triangleq C + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_2G_1^{\mathrm{T}}\Pi^{-1}.$$

2) 代数矩阵方程

$$\widetilde{A}_aQ_2 + Q_2\widetilde{A}_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\widetilde{A}_aQ_2\widetilde{A}_a^{\mathrm{T}} - \Phi R^{-1}\Phi^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\left[V + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]\Pi_0$$
$$\cdot\left[V + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right] + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}} + V + LL^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.7}$$

存在对称正定解 Q_2,式中

$$\Pi_0 \triangleq \Pi^{-1}(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}\Pi^{-\mathrm{T}},$$

$$R \triangleq W + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_2G_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}(\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})^2G_2G_1^{\mathrm{T}}\Pi_0G_1G_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\widetilde{C}Q_2\widetilde{C}^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi \triangleq (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}(\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})\left[V + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]\Pi_0G_1G_2^{\mathrm{T}}$$
$$+ \frac{1}{r}\widetilde{A}_aQ_2\widetilde{C}^{\mathrm{T}} + Q_2\widetilde{C}^{\mathrm{T}},$$

那么由

$$\hat{A} = \widetilde{A} - K\widetilde{C}, \tag{3.8}$$

$$K = \Phi R^{-1} + LUR^{-1/2}, \quad U \in \mathrm{R}^{p\times p} \text{ 为任意正交阵} \tag{3.9}$$

确定的估计器(2.5)为不确定系统(2.1)~(2.3)的 Ω 鲁棒状态估计器,且误差协方差 $X_r < Q_2$.

证 由于方程(3.6),(3.7)的解对称正定,令

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix} > 0.$$

那么

$$\overline{A}_aQ + Q\overline{A}_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\overline{A}_a(Q^{-1} - \beta_2^{-1}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H})^{-1}\overline{A}_a^{\mathrm{T}} + \frac{Q\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H}Q}{\beta_1} + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})\overline{G}\overline{G}^{\mathrm{T}} + \overline{V}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{l} A_aQ_1 + Q_1A_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}A_a(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A_a^{\mathrm{T}} \\ + \frac{Q_1H^{\mathrm{T}}HQ_1}{\beta_1} + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}} + V \end{array} & \begin{array}{l} [Q_1 + \frac{1}{r}(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A_a^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}(A - \hat{A} - KC)^{\mathrm{T}} \\ + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})G_1(G_1 - KG_2)^{\mathrm{T}} + V \end{array} \\ \begin{array}{l} (A - \hat{A} - KC)[Q_1 + \frac{1}{r}(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}A_a^{\mathrm{T}}] \\ + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})(G_1 - KG_2)G_1^{\mathrm{T}} + V \end{array} & \begin{array}{l} \hat{A}_aQ_2 + Q_2\hat{A}_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\hat{A}_aQ_2\hat{A}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}(A - \hat{A} - KC) \\ \cdot(Q_1^{-1} - \beta_2^{-1}H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(A - \hat{A} - KC)^{\mathrm{T}} \\ + (\beta_1 + \frac{\beta_2}{r})(G_1 - KG_2)(G_1 - KG_2)^{\mathrm{T}} + V + KWK^{\mathrm{T}} \end{array} \end{bmatrix}$$

由于 Q_1 是方程(3.6)的解,所以以上矩阵11分块 $[\cdot]_{11} = 0$,只要取 $\hat{A} = \widetilde{A} - K\widetilde{C}$ 则12分块 $[\cdot]_{12} = [\cdot]_{21}^{\mathrm{T}} = 0$,把 $\hat{A}_a = \hat{A} + \alpha I = \widetilde{A}_a - K\widetilde{C}$ 代入其22分块得

$$[\cdot]_{22} = \widetilde{A}_aQ_2 + Q_2\widetilde{A}_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}\widetilde{A}_aQ_2\widetilde{A}_a^{\mathrm{T}} - \Phi R^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}$$

$$+\frac{1}{r}\left[V+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]\Pi_0\left[V+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}$$
$$+V+[KR^{1/2}-\Phi R^{-1/2}][KR^{1/2}-\Phi R^{-1/2}]^{\mathrm{T}}.$$

又 Q_2 是方程(3.7)的解，于是

$$[\cdot]_{22}=[KR^{1/2}-\Phi R^{-1/2}][KR^{1/2}-\Phi R^{-1/2}]^{\mathrm{T}}-LL^{\mathrm{T}}=0.$$

根据定理 3.1，$\Lambda(\bar{A}+\Delta\bar{A})\subset\Omega(q,r)$，且 $X<Q$；由 $X<Q$，则 $X_e<Q_2$ 显然．　　证毕．

定理 3.3　存在 $L\in\mathrm{R}^{n\times p}$，使 Q_2 为方程(3.7)的解，当且仅当

$$\Xi\triangleq\tilde{A}_aQ_2+Q_2\tilde{A}_a^{\mathrm{T}}+\frac{1}{r}\tilde{A}_aQ_2\tilde{A}_a^{\mathrm{T}}-\Phi R^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}+\frac{1}{r}\left[V+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]\Pi_0$$
$$\cdot\left[V+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}\right]+(\beta_1+\frac{\beta_2}{r})G_1G_1^{\mathrm{T}}+V\leqslant 0,\text{且 }\mathrm{rank}[\Xi]\leqslant p.\qquad(3.10)$$

证　若 L 已存在，则显然有

$$\Xi=-LL^{\mathrm{T}}\leqslant 0,\quad\text{且 }\mathrm{rank}[\Xi]\leqslant p.\qquad(3.11)$$

反过来，若条件(3.10)成立，则根据矩阵的奇异值分解，一定存在矩阵 $U_1\in\mathrm{R}^{n\times p}$ 和一组非负实数 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_p\geqslant 0$ 使

$$\Xi=-U_1\mathrm{diag}[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p]U_1^{\mathrm{T}}$$
$$=-U_1\mathrm{diag}[\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_2},\cdots,\sqrt{\sigma_p}]\cdot\mathrm{diag}[\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_2},\cdots,\sqrt{\sigma_p}]U_1^{\mathrm{T}},$$

于是存在 $L=U_1\mathrm{diag}[\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_2},\cdots,\sqrt{\sigma_p}]U$，使 Q_2 为方程(3.7)的解．　　证毕．

如果从稳定性出发，只需系统(2.8)的极点位于左半复平面，让半径 $r\to+\infty$，则有如下推论．

推论 3.1　如果存在 $\beta_1>0$ 和矩阵 $L\in\mathrm{R}^{n\times p}$ 使

1) 代数 Riccati 方程

$$A_aQ_1+Q_1A_a^{\mathrm{T}}+\frac{Q_1H^{\mathrm{T}}HQ_1}{\beta_1}+\beta_1G_1G_1^{\mathrm{T}}+V=0\qquad(3.12)$$

存在正定解 Q_1；

2) 代数 Riccati 方程

$$\tilde{A}_aQ_2+Q_2\tilde{A}_a^{\mathrm{T}}-[\beta_1G_1G_2^{\mathrm{T}}+Q_2\tilde{C}^{\mathrm{T}}]R_1^{-1}[\beta_1G_1G_2^{\mathrm{T}}+Q_2\tilde{C}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}+\beta_1G_1G_1^{\mathrm{T}}+V+LL^{\mathrm{T}}=0.\qquad(3.13)$$

存在对称正定解 Q_2，式中

$$\tilde{A}\triangleq A+(V+\beta_1G_1G_1^{\mathrm{T}})Q_1^{-1},\quad\tilde{A}_a\triangleq\tilde{A}+\alpha I,$$
$$\tilde{C}\triangleq C+\beta_1G_2G_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-1},\quad R_1\triangleq W+\beta_1G_2G_2^{\mathrm{T}}.$$

那么由

$$\hat{A}=\tilde{A}-K\tilde{C},\qquad(3.14)$$

$$K=[\beta_1G_1G_2^{\mathrm{T}}+Q_2\tilde{C}^{\mathrm{T}}]R_1^{-1}+LUR_1^{-1/2},\quad U\in\mathrm{R}^{p\times p}\text{ 为任意正交阵．}\qquad(3.15)$$

确定的估计器(2.5)可使误差协方差 $X_e<Q_2$，且系统(2.8)的所有极点位于直线 $\mathrm{Re}(\lambda)=-\alpha$ 之左(图 1)．

推论 3.2　存在 $L\in\mathrm{R}^{n\times p}$，使 Q_2 为 Riccati 方程(3.13)的解，当且仅当

$$\Xi_1 \triangleq \tilde{A}_\alpha Q_2 + Q_2 \tilde{A}_\alpha^{\mathrm{T}} - [\beta_1 G_1 G_2^{\mathrm{T}} + Q_2 \tilde{C}^{\mathrm{T}}] R_1^{-1} [\beta_1 G_1 G_2^{\mathrm{T}} + Q_2 \tilde{C}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \beta_1 G_1 G_1^{\mathrm{T}} + V \leqslant 0. \tag{3.16a}$$

且 $\mathrm{rank}[\Xi_1] \leqslant p$.　　(3.16b)

4　设计举例

限于篇幅,下面用一简单的例子来说明估计器的设计过程,设不确定随机系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4+0.2\sigma & -4+0.4\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + v(t),$$

$$y(t) = [1+0.1\sigma \quad 0.2\sigma] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + w(t),$$

$V = I_2, W = 0.25; \sigma \in [-1,1]$ 为不确定量. 要求确定滤波公式(2.5)中的参数阵 $\hat{A}$ 和 K,使

1) 增广系统(2.8)所有极点位于 $\mathrm{Re}(\lambda) = -0.5$ 之左;

2) $\mathrm{var}[e_1(t)] < 1.2^2, \mathrm{var}[e_2(t)] < 0.9^2$.

解　系统不确定项可表示如下

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \sigma [1 \quad 2], \quad \Delta C = 0.1\sigma [1 \quad 2].$$

把相关参数代入方程(3.12),逐步增大 β_1,当 $\beta_1 = 4$ 时求得对称正定解

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.5480 & -1.7644 \\ -1.7644 & 2.6073 \end{bmatrix}.$$

于是 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2.8247 & 2.9116 \\ -1.7826 & -2.0545 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [1.1529 \quad 0.1342], R = [0.2900]$,令

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1.2^2 & x \\ x & 0.9^2 \end{bmatrix}.$$

其中 x 是待定参数,根据条件(3.16)可构造出方程(3.13)的一个对称正定解

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1.44 & -0.2521 \\ -0.2521 & 0.81 \end{bmatrix}.$$

根据推论 3.1,所要求的鲁棒状态估计器存在. 把 Q_2 代入(3.16a)得

$$\Xi_1 = -\begin{bmatrix} 0.0139 & 0.0831 \\ 0.0831 & 0.4957 \end{bmatrix}.$$

取

$$L = \begin{bmatrix} 0.1180 \\ 0.7041 \end{bmatrix}.$$

取 $U=[1]$ 可得

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.8275 \\ 0.9559 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -3.8639 & 2.1297 \\ -2.8846 & -2.1827 \end{bmatrix}.$$

取 $U=[-1]$ 可得

$$K_2 = \begin{bmatrix} 5.3893 \\ -1.6587 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -3.3887 & 2.1885 \\ 0.1298 & -1.8319 \end{bmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] Hotz, A. F. and Skelton, R. E.. A Covariance Control Theory. Int. J. Control, 1987, 46(1):13—32

[2] Chen Xemin, Xu Gang, Feng Zuangang and Guo Zhi. Pole Assignment in State Covariance Control. Preprint of First IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems, Zurich, Switzerland, 1991

[3] Chen Hsieh. Robust Output Variances Constrained Controller Design. Proc. ACC, 1992, 2871—2875

[4] Yaz, E. and Skelton, R. E.. Continuous and Discrete State Estimation with Error Covariance Assignment. Proc. 30th IEEE CDC, 1991, 3091—3092

Robust Estimator Design for a Class of Perturbed Linear Systems

ZHU Jihong

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics · Nanjing, 210016, PRC)

GUO Zhi

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: Robust estimator design for a class of perturbed linear system is proposed in this paper. The main purpose is to make sure that poles of augment system lie in a sepcified circular region in the left half of complex plane and steady error covariance be upper bounded for all permitted perturbation. Both the existence conditions and solutions of the robust estimater are proposed.

Key words: perturbed linear system; robust state estimator; circular region pole assignment; error covariance assignment

本文作者简介

朱纪洪　见本刊 1996 年第 2 期第 234 页.

郭　治　见本刊 1996 年第 2 期第 166 页.