时变滞后随机大系统的稳定性：向量 Lyapunov 函数法*

冯昭枢　邓飞其　刘永清

（华南理工大学自动化系·广州，510641）

摘要：本文研究变系数、变时滞线性随机大系统的均方渐近稳定性. 通过将 Halanay 不等式推广到高维空间、采用向量 Lyapunov 函数、运用 M-矩阵等工具，得到了随机大系统的稳定性判据. 文中模型考虑了子系统之间的交互随机干扰，所得稳定性判据是滞后无关的.

关键词：时滞；随机大系统；时滞不等式；M-矩阵；均方稳定性

1 引　　言

关于随机大系统的稳定性，已有不少文献，例如[1～4]等，以往文献讨论的模型一般是时不变系统，当系统中具有常数时滞时，可以采用 Lyapunov 泛函进行处理；然而，对于时滞是时变的情形，这种方法就不便使用了，在这种情况下往往需要采用关于时滞微分不等式的结果，若采用加权和 Lyapunov 函数，采用 Halanay 不等式[5]较方便；若采用向量 Lyapunov 函数，则需要将 Halanay 不等式推广到高维空间，并建立高维随机微分不等式解的比较定理或方法. 本文将 Halanay 不等式推到高维空间，采用向量 Lyapunov 函数研究一类变时滞 Itô 型线性随机大系统的均方渐近稳定性，得到了大系统滞后无关的均方稳定性判据.

2 准备知识

方阵 A 称为 M 矩阵，若 $A=sI-B$，其中 $s>0$，I 为单位矩阵，B 非负，且其谱半径 $\rho(B)<s$.

引理 1[6]　若 $A=[a_{ij}]$，$a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$，则 A 为 M 矩阵，当且仅当

i)　有向量 $x>0$ 使 $Ax>0$；或

ii)　A 非奇异且 $A^{-1}\geqslant 0$（非负）.

引理 2（Halanay 不等式的高维推广）　设 $C=[c_{ij}]_{m\times m}$，$D=[d_{ij}]_{m\times m}$ 是实常数阵，$F(t)=\mathrm{col}(F_1(t),F_2(t),\cdots,F_m(t))$ 为实向量，$C_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$，$d_{ij}\geqslant 0$，$F_i(t)\geqslant 0$，$i,j=1,2,\cdots,m$，$x(t)=\mathrm{col}(x_1(t)),x_2(t),\cdots,x_m(t))$ 满足时滞微分不等式

$$\dot{x}\leqslant Cx(t)+D\bar{x}(t)+F(t),t\geqslant\delta. \tag{1}$$

其中 $\bar{x}(t)=\mathrm{col}(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\cdots,\bar{x}_m(t))$，而

$$\bar{x}_i(t)=\sup\{x_i(t+\theta),\theta\in J=[-\tau,0]\},(\tau=\mathrm{const}>0,i=1,2,\cdots,m). \tag{2}$$

若 $-(C+D)$ 是 M 矩阵，则 $x(t)$ 满足

$$x(t)\leqslant[\|\bar{x}(\sigma)\|e^{-\lambda(t-\sigma)}]+\lambda^{-1}k(t)]M,\quad t\geqslant\sigma. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金霍英东教育基金会高校青年教师基金和广东省自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 1 月 18 日收到，1995 年 8 月 9 日收到修改稿.

其中 $\| \bar{x}(\sigma) \| = \| \bar{x}(\sigma) \|_\infty$，$M=\mathrm{col}(M_1,M_2,\cdots,M_m)\geqslant\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)$，满足 $-(C+D)M>0$；$k(t)=\max\{l_i(t)/M_i,i=1,2,\cdots,m\}$，$\lambda$ 是正常数，$l_i(t)=\max\{F_i(t),t\in[\sigma-\tau,t]\}$，$i=1,2,\cdots,m$，$\lambda$ 满足

$$\lambda M_i + \sum_{j=1}^{m}(c_{ij} + e^{\lambda\tau}d_{ij})M_j \leqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{4}$$

注 1 记 $B=\mathrm{col}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=-(C+D)^{-1}\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)$，$\beta=\min\{\beta_i\}$则可取 $M=\beta^{-1}B$.

下面引理 3 是[4]中定理 3.1 之推论.

引理 3 若随机泛函微分方程

$$\mathrm{d}x(t) = f(t,x_t) + \sigma(t,x_t)\mathrm{d}W(t) \tag{5}$$

满足[1]之基本条件(H_1)～(H_3)，$\mathscr{L}$ 是式(5)生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子，$V=\mathrm{col}(V_1,V_2,\cdots,V_m)V_i$ 满足[1]之条件(A_1)，若有

$$\mathscr{L}V(t) \leqslant \int_{-\tau}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]V(t+\theta), t \geqslant \sigma, \tag{6}$$

其中 $\eta(t,\cdot)$于$[-\tau,0]$上具有有界变差，$\tau=\mathrm{const}>0$，则有

$$EV(t) \leqslant \gamma(t), \quad t \geqslant \sigma. \tag{7}$$

其中$\gamma(t)$是泛函数微分方程

$$\gamma(t) = \int_{-\tau}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\gamma(t+\theta), \quad t \geqslant \sigma \tag{8}$$

过(σ,EV_σ)之解，这里 EV_σ 定义为

$$EV_\sigma(\theta) = EV(\sigma+\theta), \theta \in [-\tau,0].$$

3 主要结果

考虑变时滞 Itô 型线性随机大系统

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_i(t) = &[A_i(t) + \triangle A_i(t)]x_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m}[A_{ij}(t) + \triangle A_{ij}(t)]x_j(t-\tau_{ij}(t))\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{m}F_{ij}(t)x_j(t-\sigma_{ij}(t))\mathrm{d}W_{ij}(t), \quad i = 1.2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $x_i\in\mathrm{R}^{n_i}$，$A_i,\Delta A_i\in\mathrm{R}^{n_i\times n_i}$，$A_{ij},\Delta A_{ij}\in\mathrm{R}^{n_i\times n_j}$，$F_{ij}\in\mathrm{R}^{n_i\times n_j}$，$0\leqslant\tau_{ij}(t),\sigma_{ij}(t)\leqslant\tau=\mathrm{const}$，$i,j=1,2,\cdots,m$；$W(t)=[W_{11}(t),\cdots,W_{1m}(t),\cdots,W_{21}(t),\cdots,W_{2m}(t),\cdots,W_{m1}(t),\cdots,W_{mm}(t)]^{\mathrm{T}}$ 是定义在完全概率空间(Ω,F,P)上具有独立分量的 m^2 维标准 Wiener 过程；$\Delta A_i,\Delta A_{ij}$以及 F_{ij} 为不确定矩阵，

$$\| \Delta A_i(t) \| \leqslant l_i, \quad \| A_{ij}(t) + \Delta A_{ij}(t) \| \leqslant l_{ij}, \quad \| F_{ij}(t) \| \leqslant f_{ij}. \tag{10}$$

其中 $l_i,l_{ij},f_{ij}=\mathrm{const}\geqslant0$，$i,j=1,2\cdots,m$；$\|\cdot\|$ 为矩阵谱范数或 Frobenius 范数.

上述模型考虑了系数的不确定性，子系统之间的交互随机噪声激励.考虑到子系统在地域分布上的分散性，所以子系统之间的耦合均假设是滞后的.

定理 1 若

Ⅰ) 有常数 $\beta_i>0$ 及正定矩阵 $P_i(t)$使

$$\dot{P} + P_i[A_i(t) + \beta_i I] + [A_i(t) + \beta_i I]^{\mathrm{T}}P_i = -Q_i(t) < 0, \tag{11}$$

$$\lambda_i \leqslant \lambda_m(P_i(t)) \leqslant \lambda_M(P_i(t)) \leqslant \Lambda_i, \lambda_m(Q(t))q_i. \tag{12}$$

其中 $\lambda_i,\Lambda_i,q_i=\mathrm{const}>0, i=1,2\cdots,m$;

Ⅱ) $-(C+E)$是 M 矩阵,其中$C=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$, $E=[\varepsilon_{ij}]_{m\times n}$,

$$\sigma_i = q_i\Lambda_i^{-1}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 2l_i\lambda_i^{-1}\Lambda_i + m\beta_i^{-1}l_{ii}^2\lambda_i^{-1}\Lambda_i + f_{ii}^2\lambda_i^{-1}\Lambda_i, & i=j, \\ (m\beta_i^{-1}l_{ij}^2 + f_{ij}^2)\lambda_j^{-1}\Lambda_i, & i\neq j, \end{cases} \tag{13}$$

$(i,j=1,2,\cdots,m)$,

则大系统(9)之平衡态滞后无关均方渐近稳定.

证　用 $\mathscr{L}$ 表示(9)生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子,定义 Lyapunov 函数 $V=\mathrm{col}(V_1,V_2,\cdots,V_m)$,其中 $V_i=x_i^{\mathrm{T}}P_i(t)x_i(i=1,2,\cdots,m)$,则有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V_i =& x_j^{\mathrm{T}}(t)[\dot{P}_i + P_iA_i(t) + A_i^{\mathrm{T}}(t)P_i + P_i\Delta A_i(t) + \Delta A_i^{\mathrm{T}}(t)P_i]x_i(t) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} 2x_i^{\mathrm{T}}(t)P_i(A_{ij}(t) + \Delta A_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} x_j^{\mathrm{T}}(t-\sigma_{ij}(t))F_{ij}^{\mathrm{T}}P_iF_{ij}(t)x_j(t-\sigma_{ij}(t)).\end{aligned} \tag{14}$$

由于 $P_i(t)$正定,用[1]之引理 5.1 可推出

$$\begin{aligned}&2x_i^{\mathrm{T}}(t)P_i(A_{ij}(t) + \Delta A_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t)) \\ &\leqslant \frac{1}{m}\beta_i x_i^{\mathrm{T}}(t)P_ix_i(t) + \frac{m}{\beta_i}x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))(A_{ij}^{\mathrm{T}}(t) \\ &\quad + \Delta A_{ij}^{\mathrm{T}}(t))P_i(A_{ij}(t) + \Delta A_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t)),\end{aligned}$$

于是由(14)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V_i \leqslant& x_i^{\mathrm{T}}(t)[\dot{P}_i + P_iA_i(t) + A_i^{\mathrm{T}}(t)P_i + 2\beta_iP_i]x_i(t) + 2\|P_i\|\|\Delta A_i(t)\|x_i^{\mathrm{T}}(t)x_i(t) \\ &+ m\beta_i^{-1}\sum_{j=1}^{m} x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))(A_{ij}^{\mathrm{T}}(t) + \Delta A_{ij}^{\mathrm{T}}(t))P_i(A_{ij}(t) + \Delta A_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} x_j^{\mathrm{T}}(t-\sigma_{ij}(t))F_{ij}^{\mathrm{T}}(t)P_iF_{ij}(t)x_j(t-\sigma_{ij}(t)),\end{aligned}$$

由(10),进一步有

$$\mathscr{L}V_i \leqslant -\sigma_iV_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\overline{V}_j(t), \quad i=1,2\cdots,m,$$

$$\mathscr{L}V \leqslant CV(t) + E\overline{V}(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{15}$$

由引理 3,$EV(t)\leqslant\gamma(t)$其中 $\gamma(t)$是

$$\dot{\gamma}(t) = C\gamma(t) + E\overline{\gamma}(t) \tag{16}$$

过(t_0, EV_{t_0})之解. 由于$-(C+E)$为 M 矩阵,由引理 2,有常数 $\lambda>0$,常向量 $M>0$ 使

$$\gamma(t) \leqslant \|\overline{\gamma}(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}M, \quad t\geqslant t_0. \tag{17}$$

记 $\nu=\min[\lambda_i]$, $\Lambda=\max[\Lambda_i]$, $|x_{t_0}|^2=\max[\overline{x_i^2}(t_0)]$,则有

$$EV(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant \Lambda E|x_{t_0}|^2 e^{\lambda(t-t_0)}M,$$

$$E\mathrm{col}(x_1^{\mathrm{T}}(t)x_1(t),\cdots,x_m^{\mathrm{T}}(t)x_m(t)) \leqslant \nu^{-1}\Lambda E|x_{t_0}|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t\geqslant t_0,$$

$$Ex^{\mathrm{T}}(t)x(t) = \sum_{j=1}^{m}Ex_i^{\mathrm{T}}(t)x_j(t) \leqslant \nu^{-1}\Lambda\|M\|_1 E|x_{t_0}|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t\geqslant t_0,$$

于是知定理 1 之结论成立. 证毕.

定理 2 若定理 1 中条件 i)成立，且 $-C$ 为 M 矩阵，不确定系数矩阵 E 满足

$$-EC^{-1}\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)<\mathrm{col}(1,1,\cdots,1), \tag{18}$$

则大系统(9)之平衡态滞后无关均方渐近稳定.

证 由定理 1，只须证 $-(C+E)$ 亦为 M 矩阵. 由引理 1，$-C^{-1}\geqslant 0$，所以 $-C^{-1}\mathrm{col}(1,1,\cdots 1)>0$. 据条件(18)，

$$-(C+E)(-C^{-1})\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)=\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)+EC^{-1}\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)>0.$$

再由引理 1，$-(C+E)$ 为 M 矩阵. 证毕.

注 2 定理 1 之条件 ii)还可改为

$$E\mathrm{col}(\sigma_1{}^{-1},\cdots,\sigma_m{}^{-1})<\mathrm{col}(1,\cdots,1).$$

推论 1 若在(9)中，Ⅰ) $A_i(t)=\mathrm{const}$ 稳定，$i=1,2,\cdots,m$；Ⅱ) $-(C+E)$ 是 M 矩阵，其中 C,E 由(13)确定，而 P_i 是 Lyapunov 矩阵方程

$$P_i(A_i+\beta_i I)+(A_i+\beta_i I)^{\mathrm{T}}P_i=-Q_i<0 \tag{19}$$

之正定解，$0<\beta_i<\min[-\mathrm{R_e}\lambda(A_i)]$，$i=1,2,\cdots,m$；则大系统(9)之平衡态滞后无关均方渐近稳定.

推论 2 若推论 1 之条件Ⅰ)成立，而条件Ⅱ)换为：$-C$ 为 M 矩阵，

$$-EC^{-1}\mathrm{col}(1,1,\cdots,1)<\mathrm{col}(1,1,\cdots,1), \tag{20}$$

则(9)之平衡态均方渐近稳定.

4 例 子

考查随机系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t)=[\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}+\Delta A_1(t)]x_1(t)\mathrm{d}t+F_1(t)x_2(t-\sigma(t))\mathrm{d}W_1, \\ \mathrm{d}x_2(t)=[-3+\Delta A_2(t)]x_2(t)\mathrm{d}t+F_2(t)x_1(t-r(t))\mathrm{d}W_2. \end{cases} \tag{21}$$

其中 $x_1\in\mathrm{R}^2,x_2\in\mathrm{R}^1,\Delta A_1\in\mathrm{R}^{2\times 2},\Delta A_2\in\mathrm{R}^1,F_1(t)\in\mathrm{R}^{2\times 1},F_2\in\mathrm{R}^{1\times 2},\sigma(t),r(t)$ 为非负有界时滞，

$$\|\Delta A_1(t)\|\leqslant e_1,\quad |\Delta A_2(t)|\leqslant e_2,\quad \|F_1(t)\|\leqslant f_1,\quad \|F_2(t)\|\leqslant f_2. \tag{22}$$

下面由推论 2 给出(21)的鲁棒稳定性参数区域.

易知 A_1,A_2 均稳定，取 $\beta_1=\frac{1}{2}$，$\beta_2=1$，$Q_1=-2I_2$，$Q_2=-4$，分别解(19)，得

$$P_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad P_2=[1]. \tag{23}$$

经计算，

$$\lambda_m(P_1)=1.381966,\quad \lambda_M(P_1)=3.610034,\quad \lambda_m(P_2)=\lambda_M(P_2)=1,$$

$$C=\begin{bmatrix}0.5540114 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}5.22449e_1 & 3.61003f_1{}^2\\ 0.72361f_2{}^2 & 2e_2\end{bmatrix}.$$

由于 $-C$ 为 M 矩阵，所以由(20)给出(21)的一个鲁棒均方渐近稳定性参数区域：

$$E\mathrm{col}(1.805017, 0.25) < \mathrm{col}(1,1), \tag{24}$$

即 $9.43029e_1 + 0.90251f_1^2 < 1, 0.5e_2 + 1.30613f_2^2 < 1$.

5　结束语

本文通过数学上的准备,成功地将向量 Lyapunov 函数法用于 Itô 型随机系统的稳定性研究.文中建立的引理 1～3 可用于时滞系统与随机系统的稳定性研究,获得新的结果.本文采用形如(18)的条件保证 $-(C+E)$ 为 M 矩阵,简单明了,这种条件尚未在以往文献中找到,本文工作尚有进一步推广的价值.

参考文献

[1] 刘永清,冯昭枢.大型动力系统的理论与应用.卷 4:随机·稳定与控制.广州:华南理工大学出版社.1992

[2] Feng Zhaoshu and Liu Yongqing. Mean-Square Stability Independent of Delay for Stochastic Large-Scale Time-Delay Systems. Advances in Modelling and Analysis,C. 1992,35(2):59—63

[3] Feng Zhaoshu, Liu Yongqing and Guo Fengwei. Bounds for Stability Robustness of Multidelay Large-Scale Systems with Structured and Unstructured Uncertainties . Advances in Modelling and Analysis ,C. 1992,35(3):39—51

[4] Deng Feiqi, Feng Zhaoshu and Liu Yongqing. Stability and Decentralized Stabilization of Large-Scale Delay Stochastic Systems (I): Differential Inequalities and Basic Theorems. Advances in Modelling and Analysis, C. 1994,43(1):33—39

[5] Driver, R. D.. Ordinary and Delay Differential Equations. New York: Spinger-Verlag, 1977,331

[6] 陈公宁.矩阵理论与应用.北京:高等教育出版社.1990,308—341

Stability of Time-Varying Large-Scale Delay Stochastic Systems: Vector Lyapunov Function Method

FENG Zhaoshu,　DENG Feiqi　and　LIU Yongqing

(Department of Automation,South China University of Technology · Guangzhou,510641,PRC)

Abstract: In this paper, mean-square asymptotic stability of large-scale stochastic systems with varying coefficients and varying delays is investigated,some stability criteria for large-scale stochastic systems are obtained via generalizing the Halanay Inequality to high spaces , applying vector Lyapunov functions and employing M-matrices etc.. In the model of the paper ,interconnected stochastic interferences among subsystems are considered. The stability criteria obtained are independent of delays.

Key words: delay; large-scale stochastic system; delay inequality; M-matrix; mean-square stability

本文作者简介

冯昭枢　见本刊 1996 年第 1 期节 35 页.

邓飞其　见本刊 1996 年第 1 期节 35 页.

刘永清　见本刊 1996 年第 1 期节 35 页.