第 13 卷第 3 期　　　　控制理论与应用　　　　Vol. 13, No. 3
1996 年 6 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jun., 1996

大系统渐近稳定的向量 V 函数法

张继业　舒仲周

(西南交通大学应用力学研究所·成都，610031)

摘要：利用分解集结和向量 V 函数法解大系统的渐近稳定性问题是一种十分有效的方法，但过去一般限于集结成常系数线性比较方程，得到的只是指数稳定．本文研究了非线性比较方程的构造方法，给出了比较方程稳定性的判定定理，并举例说明其用处．

关键词：稳定性；大系统；比较方程

1 引　言

在大系统的稳定性研究中，向量 V 函数法是一种十分有效的方法．Bailey 首先利用分解集结和向量 V 函数法判定大系统的渐近稳定性[1]，但他考虑的只是内联项为线性的大系统，集结成的是常系数线性比较方程．一般地，对于非线性大系统，集结非线性比较方程损失的信息较小，但非线性比较方程的稳定性的判定较为困难．舒仲周在文[2]中解决了自治非线性比较方程（不要求解唯一）渐近稳定的充要条件，进而在文[3]中提出非线性比较方程的构造方法．文[4]利用文[3]的结果研究了内联项为线性的大系统的稳定性，得到了比文[1]更好的结果．

本文对于大系统提出了非线性比较方程较一般的集结方法，研究了比较方程的稳定性，并用非线性比较方程讨论了右端为多项式的大系统的稳定性．

2 非线性比较方程的集结

设大系统为

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i) + h_i(t,x),\quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{1}$$

这里 $f_i: I\times B_i(r)\to \mathrm{R}^{n_i}$，$I=(0+\infty)$，$B_i(r)\subset \mathrm{R}^{n_i}$ 是半径为 r 的原点邻域；$h_i: I\times B_i(r)\to \mathrm{R}^{n_i}$，$B(r)=\prod_{i=1}^{m} B_i(r)$，$n=\prod_{i=1}^{m} n_i$；$f_i(t,0)=h_i(t,0)=0$，$\forall\, t\in I$，$i=1,2,\cdots,m$．方程(1)满足解的存在唯一性条件．记 $\mathrm{R}_+^m \triangleq \{u \mid u_i>0, i=1,2,\cdots,m\}$，$B_+(r)\triangleq\{u\in \mathrm{R}_+^m \mid u<r_1\}$．

大系统(1)的孤立子系统为

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i),\quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{2}$$

假设对方程(1)和(2)存在 C^1 类函数 $v_i(t,x_i)$（简记为 v_i），K 类函数 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4}$ 及常正函数

$$p_i(\|x\|)\triangleq p_i(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_m\|),$$

$$q_i(\|x_j\|)_{j\neq i}\triangleq q_i(\|x_1\|,\|x_{j-1}\|,\|x_{j+1}\|,\cdots,\|x_m\|),$$

使得方程(2)对任意 $(t,x)\in I\times \overline{B}(r_0)$ $(r_0<r)$ 有

$$a_{i1}(\|x_i\|)\leqslant v_i\leqslant a_{i2}(\|x_i\|), \tag{3}$$

本文于 1995 年 3 月 8 日收到．1995 年 11 月 6 日收到修改稿．

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v^{\mathrm{T}} f_i(t,x_i) \leqslant - a_{i3}(\| x_i \|), \tag{4}$$

即方程(2)的零解渐近稳定,以及

$$\| \nabla v_i^{\mathrm{T}} h_i(t,x) \| \leqslant p_i(\| x \|). \tag{5}$$

仿文[3],则不难得到.

定理 1　设大系统(1)存在 $v_i(t,x_i)$ 满足条件(3)~(5),则可构造比较方程

$$\dot{u}_i = - a_i(u_i) + b_i(u_1,\cdots,u_m). \tag{6}$$

其中 a_i 为 K 类函数,b_i 为非减函数,$b_i(0)=0$,且 a_i,b_i 满足

$$- a_{i3}(\| x_i \|) \leqslant - a_i(v_i), \quad p_i \| x \| \leqslant b_i(v_i,v_2,\cdots,v_m).$$

如果比较方程(7)的零解渐近稳定,则大系统(1)的零解一致渐近稳定.

在(5)中,若 $p_i(\| x \|) \leqslant (1-\gamma_i)a_{i3}\| x_i \| + q_i \| x_j \|_{j\neq i}$,即将 $\| x_i \|$ 从 $p_i(\| x \|)$ 中分离出来,就得文[3]中定理1,但这样做一般要损失信息.在分散自适应控制器的设计中,一般对内联项有要求[5]:$\| h_i(t,x) \| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{m} \xi_{ij}^k \| x_j \|^k$,而 $\nabla v_i(t,x_i)$ 要求满足 $\| \nabla v_i(t,x_i) \| \leqslant c_i(\| x_i \|)$(如文[1]).所以定理1中条件具有一般性.

如果对大系统(1)满足

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla v_i^{\mathrm{T}} f_i(t,x_i) \leqslant - a_{i3}(\| x_i \|)a_{i4}(\| x_i \|), \tag{7}$$

$$\| \nabla v_i^{\mathrm{T}} h_i(t,x) \| \leqslant a_{i4}(\| x_i \|) q_i(\| x_j \|)_{j\neq i}, \tag{8}$$

则可得下面结论.

定理 2　对于大系统(1),若满足(3),(7),(8),则可构造用于判定(1)渐近稳定的比较方程为

$$\dot{u}_i = - a_i(u_i) + b_i(u_j)_{j\neq i}, \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{9}$$

其中 a_i 为 K 类函数,b_i 非减,$b_i(0)=0$ 且满足

$$- a_{i3}(\| x_i \|) \leqslant - a_i(v_i), \quad q_i(\| x_j \|)_{j\neq i} \leqslant b_i(v_j)_{j\neq i}.$$

证　由文[3]知 a_i,b_i 存在,由条件知

$$\dot{v}_i \leqslant a_{i4}(\| x_i \|)[- a_{i3}(\| x_i \|) + q_i(\| x_j \|)_{j\neq i}].$$

当 $- a_{i3}(\| x_i \|) + q_i(\| x_j \|)_{j\neq i} \leqslant 0$ 时,

$$\dot{v}_i \leqslant a_{i4}(a_{i2}^{-1}(v_i))[- a_i(v_i) + b_i(v_j)_{j\neq i}], \tag{10}$$

当 $- a_{i3}(\| x_i \|) + q_i(\| x_j \|)_{j\neq i} > 0$ 时,

$$\dot{v}_i \leqslant a_{i4}(a_{i1}^{-1}(v_i))[- a_i(v_i) + b_i(v_j)_{j\neq i}]. \tag{10'}$$

将(10)(10′)中的≤换成=,v_i 换成 u_i 即得(1)的比较方程.由文[2]定理2可知,当(9)为渐近稳定时,(10),(10′)构成的比较方程也渐近稳定,再由比较原理[6]知定理结论成立.　证毕.

定理 3　对于大系统(1),取 $v_i = a_{i1}(\| x_i \|)$,若

$$\nabla v_i^{\mathrm{T}}[f_i(t,x_i) + h_i(t,x)]$$

$$\leqslant a_{i2}(\| x_i \|)[(\alpha_{ii}a_{i3}(\| x_i \|) + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}a_{j3}(\| x_j \|)]. \tag{11}$$

则用于决定(1)渐近稳定的比较方程为

$$\dot{u}_i = Au. \tag{12}$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times m}$,

$$a_{ij} = \begin{cases} -\alpha_{ii} + \beta_{ii}, & (i = j), \\ \beta_{ij}, & (i \neq j), \end{cases} \quad (\alpha_{ii} \geqslant 0, \beta_{ij} \geqslant 0).$$

若 A 为 M 矩阵[9],则系统(1)为渐近稳定.

3 比较方程的稳定性判定及其应用

自治比较方程的一般形式为

$$\dot{u}_i = g_i(u), \quad (i = 1,2,\cdots,m). \tag{13}$$

其中 $u = \mathrm{col}(u_1,\cdots,u_m), \mathrm{col}(g_1,\cdots,g_m) \in C[\overline{B}_+(r), \mathrm{R}^m]$,且 $g_i(0) = 0$. g_i 还满足拟单调非减[6].

假设 g_i 足够光滑,使在原点处可将其展成 Taylor 级数的形式

$$g_i(u) = \sum\nolimits_i c_{p_{i1}\cdots p_{im}} u_1^{p_{im}} \cdots u_m^{p_{im}} + o_i(u). \tag{14}$$

其中 $o_i(u)$ 为高阶余量,$S_i \triangleq p_{i1} + \cdots + p_{im}$. $\sum_i$ 表示所有次数为 S_i 的项之和.

定理 4 在系统(13)中,当 $g_i(u)$ 具有形如(14)的 Taylor 展式时,(13)的零解渐近稳定的充要条件为:存在 $u_0 = (u_{10},\cdots,u_{mo})$ 使

$$\sum\nolimits_i c_{p_{i1}} \cdots p_{im} u_{10}^{p_{i1}} \cdots u_{m0}^{p_{im}} < 0, \quad (i = 1,2,\cdots,m). \tag{15}$$

证 必要性. 若(13)的零解渐近稳定,由文(2)知,在原点的某一邻域 $\overline{B}_+(r_0)$ 中,存在从原点出发,延伸到 $\overline{B}_+(r_0)$ 边缘的负曲线[2],在其上有 $g_i(u) < 0$, 故在充分接近原点处,存在 u_0,使(15)式成立.

充分性. 若有点 u_0 使(15)成立,做曲线

$$\eta_-: u_i = \varepsilon u_{i0} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$$

在 η_- 上有

$$g_i(u) = \varepsilon^{S_i} \cdot \left(\sum\nolimits_i c_{p_{i1}\cdots p_{im}} \cdot u_{10}^{p_{i1}} \cdots u_{m_0}^{p_{im}}\right) + o_i(\varepsilon). \tag{16}$$

故存在充分小的 ε_1,当 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ 时有 $g_i(u) < 0$. 由文[2]知,(13)的零解渐近稳定. 证毕.

做为例子,考虑右端为多项式或幂级数的大系统

$$\dot{x}_i = -a_i x_i^{2k_i+1} + \sum\nolimits_i a_{p_{i1}\cdots p_{in}} x_1^{p_{i1}} \cdots x_n^{p_{in}}. \tag{17}$$

其中 $o \leqslant p_{i1},\cdots,p_{in} \leqslant 2k_i + 1$,且 $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 2k_i + 1, a_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$.

令 $v_i = x_i^{2k_i} (i = 1,2,\cdots,n)$

$$\dot{v}_i = 2k_i v_i^{(2k_i-1)/(2k_i)} (-a_i v_i^{(2k_i-1)/(2k_i)} + \sum\nolimits_i |a_{p_{i1}\cdots p_{in}}| v_1^{p_{i1}/(2k_1)} \cdots v_n^{p_{in}/(2k_n)}.$$

考虑比较方程

$$\dot{u}_i = -a_i u_i^{(2k_i-1)/(2k_i)} + \sum\nolimits_i |a_{p_{i1}\cdots p_{in}}| u_1^{p_{i1}/(2k_1)} \cdots u_n^{p_{in}/(2k_n)}. \tag{18}$$

令 $u_{i0} = 1 (i = 1,2,\cdots,n)$,利用定理 4 得

定理 5 若 $\sum_i |a_{p_{i1}\cdots p_{in}}| < a_i (i = 1,2,\cdots,n)$,则系统(17)的零解渐近稳定.

考虑如下系统

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{2k_j+1}, \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{19}$$

其中 k_j 为整数，$a_{ii} \leqslant 0$. 令 $v_i = x_i^2/2$，利用定理 3 可得

定理 6　若　A^* 为 M 矩阵，其中 $A^* = (a_{ij}^*)_{n\times n}$，

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ii}, & (i = j), \\ |a_{ij}|, & (i \neq j). \end{cases}$$

则系统(19)的零解全局渐近稳定．

在系统(19)中，若 $k_j=0$，即得文[7]中相应结论．若用文[8,9]中加权 Lyapunov 法，系统(17)、(19)是比较难考虑的．

4　结束语

本文得到了不同于 Bailey 的比较一般的比较方程的集结方法，同时还将比较方程的稳定性判定转化为多项式不等式的求解，便于此领域中计算机的使用．

参　考　文　献

[1] Bailey, F. N.. The Application of Liapunov's Second Method to Interconnected Systems. SIAM, J. Control, 1966, 3:443−462

[2] 舒仲周．比较方程的稳定性．数学年刊，1986，7A(6)：676−684

[3] 舒仲周．大系统渐近稳定的一般判别定理．系统科学与数学，1990，10(1)：93−96

[4] 舒煌．大系统集结比较方程的新方法．自动化学报，1993，19(6)：720−723

[5] Lin Shi, Sunil, k. Singh. Decentralized Adaptive Controller Design for Large-scale Systems with Higher Order Interconnections. IEEE Trans. Automat. Control., 1992, 37(8):1106−1118

[6] 舒仲周．运动稳定性．成都：西南交通大学出版社，1989

[7] 李森林．$dx_s/dt = \sum_{j=1}^{n} f_{sj}(x_j)(s=1,2,\cdots,n)$的解的全局稳定性及应用(Ⅰ)(Ⅱ)．数学学报，1964，(3)：353-366；(4)：571−577

[8] 刘永清，宋中昆．大型动力系统的理论与应用．广州：华南理工大学出版社，1988

[9] Araki, M.. Stability of Large-Scale Nonlinear Systems-Quadratic-Order Theory of Composite-system Method Using M-matrics. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, AC-23(2):129−142

The Vector V-Functions Method of the Asymptotic Stability for the Large-Scale Systems

ZHANG Jiye　and　SHU Zhongzhou

(Research Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University • Chengdu, 610031, PRC)

Abstract: Using decomposition-aggregation and vector V-functions to solve stability problem of large-scale systems is an important and effective method. But in the past, it was always limited to aggregate the linear comparison equation with constant coeffecients and only the exponential stability might be determinted. In this paper, the methods to construct nonlinear comparison equations in more general form are studied, criteria of the stability for nonlinear comparison equations are obtained and usage of the Vector V-functions method is illustrated by some examples.

Key words: stability; large-scale system; comparison equation

本文作者简介

张继业 1965年生．1991年于西南交通大学获得硕士学位．现为西南交通大学应用力学研究所博士研究生．研究兴趣包括大系统的稳定性分析与控制，鲁棒控制等．

舒仲周 1924年生．西南交通大学工程力学系教授．研究兴趣包括大系统的稳定性分析与控制，鲁棒控制，力学系统的稳定性与分叉等．

国际会议消息

（转载 IFAC NEWSLETTER 1996, No. 1）

Title	1997	Place	Deadline	Further Information
IFAC Workshop Manufacturing Systems Modelling Management and Control	Feb 3-5	Vienna Austria	31 Aug. 1996	Prof. Peter Kopacek Technical University of Vienna Floragasse 7 a A-1040 Vienna Austria FAX+43/1/504 18359 e-mail: kopacek @ihrtl. ihrt. tuwien. ac. at
IMACS/IFAC Symposium (2nd) Mathematic Modelling MATHMOD'2	Feb 5-7	Vienna Austria	1 May 1996	Porf. I. Troch Technical University of Vienna (E114/5) Wiedner Hauptstrasse 8-10 A-1040 Vienna, Austria FAX+43/1/586 8093 e-mail: itrorch@email. tuwien. ac. at
IFAC Syposium (3rd) Modelling and Control of Biomedical Systems incuding Biological Systems	March 23-26	Warwick UK	May 1996	Prof. K. Godfrey Dept. of Engineering University of Warwick Coventry CV4 7AL, UK FAX +44/1203/418922 krg@eng. warwick. ac uk
IFAC/IEEE Symposium Computr-Aided Control Systems Design-CACSD97	April 28-30	Ghent Belgium	1 Oct. 1996	Prof. Luc Boullart University of Ghent, Campus Ardoyen Technologiepark-Zwijnaarde, 9 B-9052 Zwijnaade, Belgium FAX+32/9/264 5839 e-mail: boullart@autoctrl. rug. ac. be
IFAC Conference Control of Industrial Systems	May 20-22	Belfort France	20 May 1996	Dr. Michel Ferney ENIB, BP 525 F-90016 Belfort, France FAX +33/84582342
IMEKO/IFAC Congress New Measurements-Challenges and Visions	June 1-6	Tampere Finland	15 May 1996	XIV IMEKO Secretariat Finnish Society of Automation Asemapäällikönkatu 12 C SF-00520 Helsinki, Finland FAX+358 9 1461 650 e-mail: atufin@ibm. net
1997 American Control Conference (in cooperation with IFAC)	June 4-6	Albu-querque, NM USA	15 Sept. 1996	Prof. A. Haddad AACC Secretariat. Dept. of EECS Northwestern University 2145 Sheridan Road Evanston, IL 60208-3118. USA FAX+1/708/491-4455 e-mail: ahaddad@ eecs. new. edu

（下转第408页）