对运动声源的被动定位跟踪新方法

贾沛璋
(中国科学院系统科学研究所·北京,100080)

摘要: 本文针对无源声纳对运动声源的被动定位跟踪中的病态问题,提出一种基于线性估计、可减轻病态的新方法. 理论分析与仿真结果都表明,新方法与已有方法相比,可显著提高定位跟踪精度.

关键词: 被动定位跟踪; 无源声纳; 病态

1 引 言

作者在文[1]中讨论了舰载无源声纳对运动声源定位跟踪中的病态问题,从理论上证明实际工作者提出的一种最小二乘的修改算法,可减轻病态,从而提高定位跟踪精度. 本文将提出一种基于线性估计的新算法,它可减轻病态,且性能显著超过文[1]中的最小二乘修改算法.

对拖曳式线性阵或海岸的无源线性阵[2],当我们用某 t_0 时刻前后一段时间内的量测值,估计 t_0 时刻声源相对线性阵的方位角参数 $\theta_0,\dot{\theta}_0$ 和距离参数 $\rho_0,\dot{\rho}_0$ 时,只要线性阵的尺寸远小于ρ_0,则最小二乘估计将出现同样的病态问题,本文提出的新算法原理同样适用于该情形.

2 动态模型与线性估计

如[1]中那样,假定在舰的两舷各配置一个阵元构成线性声纳阵,线性阵的法向始终与舰的航行速度一致. 假定在(t_0-T_1,t_0+T_2)时间区间内声源作匀速直线运动,(t_0-T_1,t_0)时间区间内舰沿某一航向,以速度 V 航行,t_0 时刻舰处于拐弯点,(t_0,t_0+T_2)时间区间内舰沿一转弯 β 角后的航向,仍以速度 V 航行.

选取 t_0 时刻线性阵中点位置为直角坐标系的原点,坐标系的 x,y 轴在水平面内,其中 x 轴与(t_0-T_1,t_0)时间区间内舰的航向一致,y 轴指向声源所在舷侧. 记声源相对线性阵的方位角为$\theta(t)$,它是 t 时刻声源相对阵中点到达方向与线性阵指向(在(t_0-T_1,t_0)时间区间内平行 y 轴)之间的夹角. 记 t_0 时刻声源与阵中点之间距离为 ρ_0;记 t_0 时刻前一瞬时声源方位角为 θ_0,由于 t_0 时刻舰转弯,t_0 时刻后一瞬时声源方位角为 $\theta_0+\beta$;记 t_0 时刻前一瞬时声源的斜距速率、方位角速率分别为 $\dot{\rho}_0$ 和 $\dot{\theta}_0$,则 t_0 时刻后一瞬时声源的斜距速率、方位角速率分别为 $\dot{\rho}_0+V(\sin\theta_0-\sin(\theta_0+\beta))$ 和 $\dot{\theta}_0+V(\cos\theta_0-\cos(\theta_0+\beta)/\rho_0$.

现在量测的是 $\theta(t)$,要估计的声源运动参数为$(\rho_0,\theta_0,\dot{\rho}_0,\dot{\theta}_0)$,动态方程写出如下. 当 $t_0-T_1\leqslant t\leqslant t_0$ 时,有

$$\rho(t)\begin{bmatrix}\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{bmatrix}=(\rho_0+\dot{\rho}(t-t_0))\begin{bmatrix}\sin\theta_0\\ \cos\theta_0\end{bmatrix}+\rho_0\dot{\theta}\,(t-t_0))\begin{bmatrix}\cos\theta_0\\ -\sin\theta_0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

本文于 1995 年 5 月 5 日收到.

当 $t_0 < t \leqslant t_0 + T_2$ 时

$$\rho(t)\begin{pmatrix}\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{pmatrix} = (\rho_0 + \dot{\rho}(t-t_0))\begin{pmatrix}\sin(\theta_0+\beta)\\ \cos(\theta_0+\beta)\end{pmatrix} + \rho_0\dot{\theta}(t-t_0))\begin{pmatrix}\cos(\theta_0+\beta)\\ -\sin(\theta_0+\beta)\end{pmatrix}$$
$$+V(t-t_0)\begin{pmatrix}\cos(\beta-1)\\ -\sin\beta\end{pmatrix}. \tag{2}$$

记量测值为 $\theta'(t)$，量测误差 $\Delta\theta(t)$，有

$$\theta'(t) = \theta(t) + \Delta\theta(t).$$

近似地有

$$\rho(t)\begin{pmatrix}\sin\theta'(t)\\ \cos\theta'(t)\end{pmatrix} = \rho(t)\begin{pmatrix}\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{pmatrix} + \rho(t))\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ -\sin\theta(t)\end{pmatrix}\Delta\theta(t). \tag{3}$$

(1)、(2) 式代入(3) 式右端，将给出量测方程. 为了消去未知量 $\rho(t)$，用向量 $(\cos\theta'(t), -\sin\theta'(t))^\tau$ 点乘量测方程两边，获得关于 $\rho_0, \dot{\rho}_0, \rho_0\dot{\theta}_0$ 为线性的条件方程. 当 $t_0 - T_1 \leqslant t \leqslant t_0$ 时

$$\rho_0\sin(\theta'(t)-\theta_0) + \dot{\rho}_0\sin(\theta'(t)-\theta_0)(t-t_0) - \rho_0\dot{\theta}_0\cos(\theta'(t)-\theta_0)(t-t_0)$$
$$= \rho(t)\Delta\theta(t). \tag{4}$$

当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_2$ 时

$$\rho_0\sin(\theta'(t)-\theta_0-\beta) + \dot{\rho}_0\sin(\theta'(t)-\theta_0-\beta)(t-t_0)$$
$$-\rho_0\dot{\theta}_0\cos(\theta'(t)-\theta_0-\beta)(t-t_0)$$
$$= V(\cos(\theta'(t)-\beta) - \cos(\theta'(t)))(t-t_0) + \rho(t)\Delta\theta(t). \tag{5}$$

(4)、(5) 式对 θ_0 是非线性的，θ_0 的估计可用一次样条函数平滑预先求得. 这是一个三维估计算法.

下面给出四维估计算法的数学模型. 记 t 时刻声源在直角坐标系中的坐标为 $(x(t), y(t))$，舰坐标为 $(X(t), Y(t))$. 记

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - x'(t), \quad \tilde{y}(t) \triangleq y(t) - y'(t),$$

有关系：当 $t_0 - T_1 \leqslant t \leqslant t_0$ 时

$$\rho(t)\sin\theta(t) = \tilde{x}(t), \quad \rho(t)\cos\theta(t) = \tilde{y}(t), \tag{6}$$

当 $t_0 < t \leqslant t_0 + T_2$ 时

$$\rho(t)\sin\theta(t) = \tilde{y}(t)\sin\beta + \tilde{x}(t)\cos\beta,$$
$$\rho(t)\cos\theta(t) = \tilde{y}(t)\cos\beta + \tilde{x}(t)\sin\beta. \tag{7}$$

在直角坐标系中的量测中的量测方程如下. 当 $t_0 - T_1 \leqslant t \leqslant t_0$ 时

$$\rho(t)\begin{pmatrix}\sin\theta'(t)\\ \cos\theta'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix}(t-t_0) + \rho(t)\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ -\sin\theta(t)\end{pmatrix}\Delta\theta(t). \tag{8}$$

当 $t_0 < t \leqslant t_0 + T_2$ 时

$$\rho(t)\begin{pmatrix}\sin\theta'(t)\\ \cos\theta'(t)\end{pmatrix} = (x_0 + \dot{x}_0(t-t_0)\begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\end{pmatrix} + (y_0 + \dot{y}_0(t-t_0)\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}$$
$$-V(t-t_0)\begin{pmatrix}1-\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} + \rho(t)\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ -\sin\theta(t)\end{pmatrix}\Delta\theta(t). \tag{9}$$

式中

$$(x_0,y_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0)=((\tilde{x}(t_0),\tilde{y}(t_0),\tilde{\dot{x}}(t_0),\tilde{\dot{y}}(t_0)). \tag{10}$$

为了消去未知量 $\rho(t)$，用向量 $(\cos'\theta(t),-\sin\theta'(t))^\tau$ 点乘上述量测方程两边，获得关于 x_0，$y_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0$ 为线性的条件方程. 当 $t_0-T_1\leqslant t\leqslant t_0$ 时

$$\begin{aligned}x_0\cos\theta'(t)-y_0\sin\theta'(t)+\dot{x}_0\cos\theta'(t)(t-t_0)-\dot{y}_0\sin\theta'(t)(t-t_0)\\=-\rho(t)\Delta\theta(t).\end{aligned} \tag{11}$$

当 $t_0<t\leqslant t_0+T_2$ 时

$$\begin{aligned}x_0\cos(\theta'(t)-\beta)-y_0\sin(\theta'(t)-\beta)+\dot{x}\cos(\theta'(t)-\beta)(t-t_0)-\dot{y}\sin(\theta'(t)-\beta)(t-t_0)\\=V(\cos\theta'(t)-\cos(\theta'(t)-\beta))(t-t_0)-\rho(t)\Delta\theta(t).\end{aligned} \tag{12}$$

3　最小二乘估计的病态分析

现以三维线性估计为例，分析最小二乘算法的病态及其对估计精度的影响. 假定由声纳阵获得一系列的量测值 $(\theta'_i,t_i)(t_0-T_1<t\leqslant t_0+T_2)$，要求(4)，(5)式中未知参数 $\rho_0,\dot{\rho}_0$ 和 $\rho_0\dot{\theta}_0$ 的最小二乘估计，假定 θ_0 估计的 $\bar{\theta}_0$ 已由平滑预先求得. 记

$$T\triangleq\max(T_1,T_2).$$

为了统一量纲，改为估计 $\rho_0,\dot{\rho}_0T$ 和 $\rho_0\dot{\theta}_0T$. 记

$$\tau_i\triangleq(t_i-t_0)/T.$$

$$a_i\triangleq\begin{cases}\sin(\theta'_i-\bar{\theta}_0)\\ \sin(\theta'_i-\bar{\theta}_0-\beta),\end{cases}\quad b_i\triangleq\begin{cases}\tau_i\sin(\theta'_i-\bar{\theta}_0), & i\leqslant 0,\\ \tau_i\sin(\theta'_i-\bar{\theta}_0-\beta), & i>0,\end{cases} \tag{13}$$

$$c_i\triangleq\begin{cases}-\tau_i\cos(\theta'_i-\bar{\theta}_0),\\ -\tau_i\cos(\theta'_i-\bar{\theta}_0-\beta),\end{cases}\quad d_i\triangleq\begin{cases}0, & i\leqslant 0,\\ \tau_i(\cos(\theta'_i-\beta)-\cos\theta'_i)/\sin\beta, & i>0.\end{cases}$$

(13)式中定义的各量其绝对值都小于或等于 1.

条件方程(4)，(5)式可合并写为(忽略 $\bar{\theta}_0$ 的误差)：

$$\rho_0a_i+(\dot{\rho}_0T)b_i+(\rho_0\dot{\theta}_0T)c_i=VT\sin\beta d_i+\rho_i\Delta\theta_i. \tag{14}$$

参数的最小二乘估计 $\hat{\rho}_0$，$(\hat{\dot{\rho}}_0T)$ 和 $(\hat{\rho}_0\hat{\dot{\theta}}_0T)$ 如下

$$\begin{bmatrix}\hat{\rho}_0\\ \hat{\dot{\rho}}_0T)\\ \hat{\rho}_0\hat{\dot{\theta}}_0T\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}VT\sin\beta\frac{1}{N}\sum_i a_id_i\\ VT\sin\beta\frac{1}{N}\sum_i b_id_i\\ VT\sin\beta\frac{1}{N}\sum_i c_id_i\end{bmatrix}. \tag{15}$$

式中 N 表示量测值的总数.

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_i a_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i a_ib_i & \frac{1}{N}\sum_i a_ic_i\\ \frac{1}{N}\sum_i a_ib_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i b_ic_i\\ \frac{1}{N}\sum_i a_ic_i & \frac{1}{N}\sum_i b_ic_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i^2\end{bmatrix},$$

最小二乘估计的病态问题是指求逆矩阵 P 呈现病态，这种病态性由该矩阵的条件数量度。这里，我们将用该矩阵行列式的量级表示其病态程度。记

$$\varepsilon \triangleq VT\sin\beta/\rho_0.$$

当

$$\varepsilon << 1 \tag{16}$$

时，最小二乘估计将出现病态。显然只要 VT/ρ_0 与 $\sin\beta$ 两者之一为小量，都将使(16)式成立，ε 的大小就判定了最小二乘估计的病态程度。

由于 $\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\},\{d_i\}$ 中用到量测值 θ_i'，将包含量测误差，现把它们写为

$$a_i = \bar{a}_i + \Delta a_i,\quad b_i = \bar{b}_i + \Delta b_i,$$
$$c_i = \bar{c}_i + \Delta c_i,\quad d_i = \bar{d}_i + \Delta d_i. \tag{17}$$

$\{\bar{a}_i\},\{\bar{b}_i\},\{\bar{c}_i\},\{\bar{d}_i\}$ 表示用真值 θ_i 代替 θ_i' 计算的部分，$\{\Delta a_i\},\{\Delta b_i\},\{\Delta c_i\},\{\Delta d_i\}$ 表示由量测误差 $\Delta\theta_i$ 引起的部分。由条件方程(14)，有如下关系：

$$\bar{a}_i + \delta_1\bar{b}_i + \delta_2\bar{c}_i = \varepsilon\bar{d}_i. \tag{18}$$

式中

$$\delta_1 \triangleq \dot{\rho}_0 T/\rho_0,\quad \delta_2 \triangleq \dot{\theta}_0 T.$$

定义

$$\mu \triangleq \det P.$$

且把 μ 写为两部分

$$\mu = \mu_0 + \mu_1. \tag{19}$$

其中

$$\mu_0 \triangleq \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{b}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{b}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i^2 \end{vmatrix}.$$

μ_1 表示由量测误差 $\{\Delta\theta_i\}$ 引起的部分。用常数 δ_1,δ_2 分别乘 μ_0 行列式的第二、三列，加到第一列上；再分别乘第二、三行，加到第一行上。得

$$\mu_0 = \varepsilon^2\Delta_0. \tag{20}$$

式中

$$\Delta_0 \triangleq \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i \bar{d}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i\bar{d}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i\bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i^2 \end{vmatrix}.$$

把(15)式写成分量形式，其中 ρ_0 分量为：

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0\varepsilon\lambda/\mu. \tag{21}$$

式中

$$\lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i a_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i a_i b_i & \frac{1}{N}\sum_i a_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i b_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i c_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i^2 \end{vmatrix}.$$

把 λ 写为两部分：

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1. \tag{22}$$

其中

$$\lambda_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i \bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i \bar{b}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i \bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i \bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i \bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i \bar{d}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{b}_i \bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{c}_i^2 \end{vmatrix} = \varepsilon \Delta_0. \tag{23}$$

λ_1 表示量测误差$\{\Delta\theta_i\}$引起的部分.(19),(22)式代入(21)式：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= \rho_0(\varepsilon^2\Delta_0 + \varepsilon\lambda_1)/(\varepsilon^2\Delta_0 + \mu_1) \\ &= \rho_0 - \rho_0(\mu_1 - \varepsilon\lambda_1)/(\varepsilon^2\Delta_0 + \mu_1). \end{aligned} \tag{24}$$

由该式可见，$\tilde{\rho}_0$ 的估计误差主要来自 μ_1，μ_1 的概率分布是十分复杂的，由蒙特卡洛方法计算显示，μ_1 主要产生 μ 的系统偏差，且系统偏差的量级随 σ 非线性地增大.这里假定$\{\Delta\theta_i\}$为零均值，方差为 σ^2 的独立同分布随机量.对$(\dot{\rho}_0 T)$与$(\rho_0\dot{\theta}_0 T)$分量也可作同样分析，$(\hat{\rho}_0\dot{\theta}_0 T)$的估计误差也主要来自 μ_1.但$(\dot{\rho}_0 T)$的估计误差，当$(\dot{\rho}_0 T/\rho_0$ 为小量时，由

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 T &= \dot{\rho}_0 T(\varepsilon^2\Delta_0 + \varepsilon\frac{\rho_0}{\dot{\rho}_0 T}\lambda_2)/(\varepsilon^2\Delta_0 + \mu_1) \\ &= \dot{\rho}_0 T - \dot{\rho}_0 T(\mu_1 - \varepsilon\frac{\rho_0}{\dot{\rho}_0 T}\lambda_2)/(\varepsilon^2\Delta_0 + \mu_1). \end{aligned} \tag{25}$$

可见：$(\dot{\rho}_0 T - \dot{\rho}_0 T)$不仅来自 μ_1，还来自 λ_2.

4 新的线性估计算法

在阐述新的线性估计算法之前，先回顾一下[1]中叙述的最小二乘修改算法.该算法是把(15)式修改为：

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_0 \\ \dot{\rho}_0 T \\ \tilde{\rho}_0\dot{\theta}_0 T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_i a_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i a_i b_i & \frac{1}{N}\sum_i a_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i' a_i b_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i' b_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i'' c_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i'' b_i c_i & \frac{1}{N}\sum_i'' c_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} VT\sin\beta\,\frac{1}{N}\sum_i a_i d_i \\ VT\sin\beta\,\frac{1}{N_1}\sum_i' b_i d_i \\ VT\sin\beta\,\frac{1}{N_2}\sum_i'' c_i d_i \end{bmatrix}. \tag{26}$$

其中 $\sum_i$ 表示全部量测求和，$\sum_i{}'$ 与 $\sum_i{}''$ 分别表示对 i 求不同的部分和，N_1 与 N_2 分别是它们的求和数，$N_1+N_2=N$. 记该式右端求逆矩阵的行列式为 μ'，且把 μ' 写为两部分：

$$\mu' = \mu_0' + \mu_1'. \tag{27}$$

其中

$$\mu_0' = \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{b}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{a}_i\bar{b}_i{}^2 & \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{b}^2 & \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{b}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{a}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{b}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{c}_i{}^2 \end{vmatrix} = \varepsilon\Delta_1. \tag{28}$$

式中

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i \bar{d}_i\bar{a}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{b}_i & \frac{1}{N}\sum_i \bar{a}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{d}_i\bar{b}_i{}^2 & \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{b}^2 & \frac{1}{N}\sum_i{}' \bar{b}_i\bar{c}_i \\ \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{d}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{b}_i\bar{c}_i & \frac{1}{N}\sum_i{}'' \bar{c}_i{}^2 \end{vmatrix}.$$

μ_0' 与(20)式的 μ_0 相比，提高了量级. 由(26)式：

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0(\varepsilon\Delta_1 + \varepsilon\lambda_1')/(\varepsilon^2\Delta_1 + \mu_1'). \tag{29}$$

式中 λ_1' 类似于 λ_1 定义. μ_1' 应与(24)式中的 μ_1 同量级，因此(29)式与(24)式相比较，提高了 $\tilde{\rho}_0$ 的估计精度.

该修改算法存在两个问题：一是在三个法方程中有二个未利用全部量测值，这将在一定程度上降低估计精度；另一是(26)式右端的求逆矩阵为非对称阵，当 σ 较大时，会使其行列式 μ' 小于零，而最小二乘估计的求逆矩阵是正定阵，不管 σ 多大，其行列式 μ 都大于零.

由条件方程(14)式及(17)，(18)式可知，有关系

$$\Delta a_i + \frac{\dot{\rho}_0 T}{\rho_0}\Delta b_i + (\dot{\theta}_0 T)\Delta c_i = \varepsilon\Delta d_i + \frac{\rho_i}{\rho_0}\Delta\theta_i. \tag{30}$$

现在量测误差 $\Delta\theta_i$ 分散在条件方程各系数中，其中右端的误差 $\varepsilon\Delta d_i$ 很小，主要分布在左端，这是最小二乘估计精度低的主要原因. 在一定条件下，这种情况可以改善. 即如果 $\Delta\theta_i$ 主要集中于(30)式左端的某一项上，则可把该项移到条件方程右端. 对本文的工程背景，只要舰的舷侧大体指向声源目标，使 $(\theta_i-\theta_0)$ 或 $(\theta_i-\theta_0-\beta)$ 在 $-45°$ 与 $+45°$ 之间，则 Δa_i 将占了 $\Delta\theta_i$ 的 70% 以上成份，且 $|\Delta a_i|$ 相对其余各误差 $|\frac{\dot{\rho}_0 T}{\rho_0}\Delta b_i|$，$|\dot{\theta}_i T\Delta c_i|$ $|\varepsilon\Delta d_i|$ 都要大得多. 此时可把条件方程(14)式改写为

$$-\left(\frac{VT\sin\beta}{\rho_0}\right)d_i + \left(\frac{\dot{\rho}_0 T}{\rho_0}\right)b_i + (\dot{\theta}_0 T)c_i = -a_i + \frac{\rho_i}{\rho_0}\Delta\theta_i, \tag{31}$$

且改以 $(VT\sin\beta/\rho_0)$，$(\dot{\rho}_0 T/\rho_0)$，$(\dot{\theta}_0 T)$ 作待估计参数，这就是三维线性估计的新算法. 该算法可等价地写为

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}_0 \\ \dot{\hat{\rho}}_0 T \\ \hat{\rho}_0 \dot{\hat{\theta}}_0 T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_i a_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i d_i \\ \frac{1}{N}\sum_i a_i b_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i a_i c_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} VT\sin\beta \frac{1}{N}\sum_i d_i^2 \\ VT\sin\beta \frac{1}{N}\sum_i b_i d_i \\ VT\sin\beta \frac{1}{N}\sum_i c_i d_i \end{bmatrix}. \tag{32}$$

记上式右端求逆矩阵的行列式为 μ''，且把 μ'' 分为两部分，其意义类似(19)式：

$$\mu'' = \mu_0'' + \mu_1''. \tag{33}$$

其中

$$\mu_0'' = \varepsilon\Delta_0. \tag{34}$$

按分量形式，$\tilde{\rho}$ 可写为：

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0 \varepsilon \lambda''/\mu''. \tag{35}$$

把 λ'' 写为两部分

$$\lambda'' = \lambda_0'' + \lambda_1''. \tag{36}$$

其中

$$\lambda_0'' = \begin{vmatrix} \frac{1}{N}\sum_i d_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i b_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i d_i \\ \frac{1}{N}\sum_i b_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i^2 & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i \\ \frac{1}{N}\sum_i c_i d_i & \frac{1}{N}\sum_i b_i c_i & \frac{1}{N}\sum_i c_i^2 \end{vmatrix} \tag{37}$$

λ'' 表示由量测误差$\{\Delta\theta_i\}$引起的部分. (33)，(36)式代入(35)式：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= \rho_0(\varepsilon\Delta_0 + \varepsilon\lambda_1'')/\varepsilon\Delta_0 + \mu_1''. \\ &= \rho_0 - \rho_0(\mu_1'' - \varepsilon\lambda_1'')/(\varepsilon\Delta_0 + \mu_1''). \end{aligned} \tag{38}$$

新算法既提高了行列式的量级，又利用了全部量测值，其估计精度将高于前述修改算法.

关于四维线性估计的新算法，把条件方程(11)、(12)式合并写为：

$$x_0\tilde{a}_i + y_0\tilde{b}_i + (\dot{x}_0 T)\tilde{c}_i + (\dot{d}_i T)\tilde{d}_i = VT\sin\beta\tilde{e}_i - \rho_i\Delta\theta_v. \tag{39}$$

式中

$$\tilde{a}_i \triangleq \begin{cases} \cos\theta_i', \\ \cos(\theta_i - \beta), \end{cases} \quad \tilde{b}_i \triangleq \begin{cases} -\sin\theta_i', & i \leqslant 0, \\ -\sin(\theta_i' - \beta), & i > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{c}_i \triangleq \begin{cases} \tau_i\cos\theta_i', \\ \tau_i\cos(\theta_i - \beta), \end{cases} \quad \tilde{d}_i \triangleq \begin{cases} -\tau_i\sin\theta_i', & i \leqslant 0, \\ -\tau_i\sin(\theta_i' - \beta), & i > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i \triangleq \begin{cases} 0, & i \leqslant 0, \\ \tau_i(\cos\theta_i' - \cos(\theta_i' - \beta)/\sin\beta, & i > 0. \end{cases}$$

在舰艇侧大体指向声源目标的条件下，新算法把条件方程改写为：

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\tilde{a}_i - \left(\frac{VT\sin\beta}{y_0}\right)\tilde{e}_i + \left(\frac{\dot{x}_0 T}{y_0}\right)\tilde{c}_i + \left(\frac{\dot{y}_0 T}{y_0}\right)\tilde{d}_i = -\tilde{b}_i - \frac{\rho_i}{y_0}\Delta\theta_i. \tag{40}$$

且改以(x_0/y_0)，$(VT\sin\beta/y_0)$，$(\dot{x}_0 T/y_0)$，$(\dot{y}_0 T/y_0)$作待估计参数

无论是原最小二乘算法，还是修改算法或新算法，都只适用于一定的量测精度范围，当行列式μ，$\mu' \mu''$分别被被其误差μ_1，$\mu_1' \mu_1''$淹盖时，估计将失效. 具体地说，在一定的ϵ之下，对三个算法各存在一个σ的临界值，记为σ_0；σ_0'，σ_0''，σ达到某算法的临界值，则该算法失效，这里$\sigma_0'' > \sigma_0' > \sigma_0$，临界值随$\epsilon$的减少而降低.

5 仿真结果

选择舰与声源的运动参数如下：

$$\theta_0 = -10°, \quad \rho_0\dot{\theta}_0 = 4.12152\mathrm{m/s}, \quad \rho_0 = 15000\mathrm{m},$$
$$\dot{\rho}_0 = 1.3892\mathrm{m/s}, \quad V = 8\mathrm{m/s}, \quad \beta = 30°.$$

声纳的量测每秒一个采样，在舰的拐弯点前后各量测 240 秒，即$T = T_1 = T_2 = 240$秒，$N = 480$，此时

$$\epsilon = VT\sin\beta/\rho_0 \doteq 0.064.$$

量测误差的标准差σ不超过0.1，产生 300 组模拟量测样本计算三种算法的参数估计中误差，其中修改算法是在后二个法方程中求采样的部分和，取$N_1 = 160$，$N_2 = 320$，，后者是对拐弯点前后各 160 个采样求和，前者是对其余的采样求和.

三种算法对σ的临界值分别为：

$$\sigma_0 = 0.02, \quad \sigma'_0 = 0.08, \quad \sigma''_0 = 0.12.$$

下面的表 1 和表 2 给出标准差σ为0.01 时三种算法：最小二乘估计、修改算法、新算法的中误差$\Delta\theta_0$，$\Delta(\rho_0\dot{\theta}_0)$，$\Delta\rho_0$与$\Delta\dot{\rho}_0$.

表 1 三维线性估计中误差

	$\Delta\theta_0$	$\Delta(\rho_0\dot{\theta}_0)$	$\Delta\rho_0$	$\Delta\dot{\rho}_0$
最小二乘估计	0.001827	0.5356m/s	1824.42m	0.4571m/s
修改算法	0.001827	0.1608m/s	547.90m	0.1364m/s
新算法	0.001827	0.1571m/s	535.02m	0.1038m/s

表 2 四维线性估计中误差

	$\Delta\theta_0$	$\Delta(\rho_0\dot{\theta}_0)$	$\Delta\rho_0$	$\Delta\dot{\rho}_0$
最小二乘估计	0.008483	0.9382m/s	3195.87m	0.6743m/s
修改算法	0.001513	0.1620m/s	552.07m	0.1131m/s
新算法	0.001054	0.1060m/s	361.08m	0.0788m/s

参 考 文 献

[1] 贾沛璋. 舰载声纳对运动声源跟踪定位中的病态问题，自动化学报，1994，20：218—222

[2] Moose，R. L.. Passive Range Estimation of an Underwater Maneuvering Targer. IEEE Trans . ASSP 1987，35：27—285

A New Method for Locating and Tracking a Moving Source Using Passive Measurements

JIA Peizhang

(Institute of Systems Science，Academia Sinica · Beijing，100080，PRC)

Abstract：To solve the problem of the ill-condition in locating and tracking a moving source using passive measurements，a new method based on linear estimation is presented in this paper，The theoretical analysis and the simulation examples given in this paper show that the new method can evidently improve the estimation accuracy of the known methods.

Key words：passive localization and tracking；passive sonar；ill-condition

本文作者简介

贾沛璋 1942年生. 中国科学院系统科学所研究员. 1964年毕业于南京大学. 多年来从事卫星、导弹、飞机等运动目标的跟踪滤波，异常值判别与稳健估计，数字信号处理等科研工作，已发表论文卅余篇，三本著作. 近两年的兴趣在参数估计，小波分析在信号处理中的应用.