

# 一类不确定动态系统的输出反馈模糊变结构控制\*

张天平

冯纯伯

(扬州大学师范学院数学与计算机科学系·扬州, 225002) (东南大学自动化研究所·南京, 210018)

**摘要:** 对于一类具有非线性不确定性及外加干扰的系统, 本文提出了一种模糊变结构控制方案, 控制中只利用系统输出信号和一些辅助信号. 利用李亚普诺夫方法, 证明了闭环系统全局 BI-BO 稳定. 仿真表明该控制方案可回避通常滑模控制中不可避免的颤动, 且系统具有很强的鲁棒性.

**关键词:** 模糊控制; 变结构控制; 不确定性系统; 鲁棒性; 稳定性

## 1 引言

近几年来, 模糊控制已成功地应用到许多复杂的工业过程和家电产品<sup>[1]</sup>, 模糊控制的两个明显特征是: 1) 能够容易集成专家和操作人员的经验; 2) 通过选取隶属函数, 规则、各种蕴含算子和非模糊化方法, 模糊逻辑提供了一种非线性关系, 由于这些特征使得模糊控制能够应用于那些定义不完善或难以精确建模的复杂过程. 然而, 模糊控制的主要缺点是缺少系统的分析和设计方法.

变结构控制是一种控制系统的综合方法, 其优点能够克服系统的不确定性, 对干扰和未建模动态具有很强的鲁棒性. 缺点是会产生高频颤动, 另外, 实现滑动模态一般要求全状态可测<sup>[2]</sup>. 由于系统具有参数的不确定和未建模动态的存在, 系统的全状态难以全部量测到. 如何利用输出反馈实现滑模控制是理论上和实际上亟待解决的课题. 文[3]讨论了一类不确定性系统的输出反馈稳定化问题, 在假定建模的线性部分各参数已知的情况下, 采用降维观测器设计出变结构控制器. 文[4, 5]根据滑模控制原理, 利用状态反馈设计出一种模糊控制器, 但其控制律均不能用解析式表示, 闭环系统的稳定性缺少理论分析.

本文针对[3]中的模型, 只利用输出反馈和一些辅助信号并采用单元集模糊化方法和重心非模糊化方法, 设计出能用解析式表示的两个相互协调作用的模糊控制器, 控制信号是连续的. 另外, 设计中不要求建模的线性部分的各参数精确知道. 利用 Lyapunov 方法, 证明了闭环系统是全局稳定的. 仿真结果表明, 本文提出的模糊控制算法能提高控制系统的鲁棒性.

## 2 问题的描述及基本假设

考虑下面一类不确定性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(u + \varphi(x, t) + \psi(t)) + M(y), \\ y = c^T x. \end{cases} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金和江苏省自然科学基金资助课题.

本文于 1995 年 4 月 4 日收到. 1995 年 12 月 13 日收到修改稿.

其中  $x \in R^n$  是不可量测的状态向量,  $u$  是控制输入,  $y \in R$  是可量测的过程输出,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $b, c \in R^n$ ,  $A, b, c$  可以是未知参数,  $\varnothing(x, t): R^n \times R_+ \rightarrow R, \psi(t): R_+ \rightarrow R, M(y): R \rightarrow R^n$ ,  $\varnothing(x, t), \psi(t)$  和  $M(y)$  表示建模不确定性和干扰.

控制目标是利用输出反馈和一些辅助信号, 设计出一种模糊控制器, 使得系统状态收敛到平衡点一个小邻域.

根据文[3]中的讨论, 对被控过程作出如下假设:

A1) 系统(1)的建模部分传递函数  $c^T(sI - A)^{-1}b \triangleq \frac{h_m(s)}{d_n(s)}$  是逆稳定的, 即

$$h_m(s) = 0 \rightarrow \operatorname{Re}[s] < -\delta_0, \quad \delta_0 > 0.$$

$h_m(s), d_n(s)$  分别是  $s$  的  $m$  次多项式和  $s$  的  $n$  次多项式.

A2)  $|\varnothing(x, t)| \leq \delta_1 \|x\|, \|M(y)\| \leq \delta_2 |y|, |\Psi(t)| \leq \delta_3.$  (2)

其中  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0, |\cdot|$  表示绝对值,  $\|\cdot\|$  表示欧氏范数.

不失一般性, 假设  $h_m(s)$  和  $d_n(s)$  互质. 因此不妨假设  $(A, b, c)$  为能控规范型, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [c_1, c_2, \dots, c_m, 1, 0, \dots, 0].$$

### 3 模糊控制器设计及稳定性分析

作坐标变换

$$z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = Px, \tag{3}$$

其中

$$z_0 \in R^m, \quad z_1 \in R^{n-m},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{m-1} & c_m & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

显然, 矩阵  $P$  是对角线上元素全为 1 的下三角方阵, 因此  $\det(P) = 1$ .

在新坐标系中, 系统(1)可变为

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A_{00}z_0 + A_{01}y + M_1(y), \\ \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + b_1(u + A_1^0 z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) + M_2(y), \\ y = \bar{c}^T z_1. \end{cases} \tag{5}$$

其中  $A_{00} \in R^{m \times m}$ ,  $A_{11} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $b_1, \bar{c} \in R^{n-m}$ ,

$$A_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \cdots & -c_m \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{n-m} \end{bmatrix},$$

$$A_{01}^T = [0, \dots, 0, 1], \quad A_{10}^T = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m], \quad b_1^T = [0, \dots, 0, 1], \quad \bar{c}^T = [1, 0, \dots, 0],$$

$$M_1(y): R \rightarrow R^m, \quad M_2(y): R \rightarrow R^{n-m}, \quad \varnothing(z_0, z_1, t): R^m \times R^{n-m} \times R_+ \rightarrow R,$$

$\beta_i, \alpha_j$  是常数,  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, \dots, n - m$ .

$$|\varnothing(z_0, z_1, t)| \leq \delta_4 \|z_0\| + \delta_5 \|z_1\|, \tag{6}$$

$$\|M_1(y)\| \leq \delta_6 |y|, \quad \|M_2(y)\| \leq \delta_7 |y|. \tag{7}$$

其中  $\delta_4, \delta_5, \delta_6$  是非负数.

由于  $A_{00}$  的特征多项式  $c_1 + c_2s + \dots + c_ms^{m-1} + s^m$  与传递函数  $\bar{c}^T(sI - A)^{-1}b$  的分子多项式  $h_m(s)$  相同, 根据假设 A1 可知,  $c_1 + \dots + c_ms^{m-1} + s^m$  是霍尔维茨多项式, 所以  $c_1, \dots, c_m$  均为正实数, 并且  $\dot{z}_0 = A_{00}z_0$  是渐近稳定的. 由  $A_{11}, b_1, \bar{c}$ , 可知,  $(A_{11}^T, \bar{c})$  能控, 且

$$\frac{N_0(s)}{D_0(s)} \triangleq \bar{c}^T(sI - A_{11})^{-1}b_1 = \frac{1}{\det(sI - A_{11})} \tag{8}$$

为了讨论方便, 以下分  $n^* = n - m = 1$  和  $n^* \geq 2$  两种情况进行设计. 为了节约篇幅,  $n^* = 1$  见文[6].

### 3.1 模糊控制器设计 $n^* \geq 2$

$$\text{令} \quad M_2(y) = \sum_{i=1}^{n^*} d_i M_{2i}(y). \tag{9}$$

其中  $d_i^T = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \in R^{1 \times n^*}$ ,  $M_{2i}(y)$  表示  $M_2(y)$  的第  $i$  个分量. 于是, 由式(5)得

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A_{00}z_0 + A_{01}y + M_1(y), \\ \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + b_1(u + A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) + \sum_{i=1}^{n^*} d_i M_{2i}(y), \\ y = \bar{c}^T z_1. \end{cases} \tag{10}$$

式(10)用传递函数表示输入输出关系如下

$$y(t) = \frac{1}{D_0(s)}(u + A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) + \sum_{i=1}^{n^*} \frac{N_i(s)}{D_0(s)} d_i M_{2i}(y).$$

其中  $\frac{N_i(s)}{D_0(s)} = \bar{c}^T(sI - A_{11})^{-1}d_i, i = 1, \dots, n^*$ . 定义  $D_1(s)$  和  $R(s)$  如下

$$D_1(s) = \prod_{i=1}^{n^*} (s + \lambda_i), \quad R(s) = D_1(s) - D_0(s).$$

其中  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n^*}, i = 1, \dots, n^*$ . 记  $L_i(s) = \prod_{j=i}^{n^*} (s + \lambda_j)$ . 于是得

$$\frac{R(s)}{D_1(s)}y = y - \frac{D_0(s)}{D_1(s)}y,$$

即

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\lambda_1 y(t) + \frac{1}{L_2(s)} u(t) + \frac{R(s)}{L_2(s)} y(t) + \frac{1}{L_2(s)} (A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{N_i(s)}{L_2(s)} M_{2i}(y). \end{aligned} \quad (11)$$

由于  $(A_{11}^T, \bar{c})$  能控, 所以存在向量  $G \in R^n$  使得  $A_{11} - G\bar{c}^T$  是稳定的, 从而式(5)可写成:

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A_{00} z_0 + A_{01} y + M_1(y), \\ \dot{z}_1 = \bar{A}_{11} z_1 + b_1(u + A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) + M_2(y) + G y, \\ y = \bar{c}^T z_1. \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\bar{A}_{11} = A_{11} - G\bar{c}^T$ . 由于  $A_{00}$  和  $\bar{A}_{11}$  是稳定矩阵, 所以存在正常数  $\delta_0, \delta_1, \gamma_0, \gamma_1$  使得  $\|\exp(A_{00}t)\| \leq \gamma_0 \exp(-\delta_0 t)$ ,  $\|\exp(\bar{A}_{11}t)\| \leq \gamma_1 \exp(-\delta_1 t)$ , 根据[3]可知, 存在向量  $G \in R^n$  使得  $-\delta_1 + \gamma_1 \delta_5 < 0$ . 取正常数  $\bar{\delta}_2 < \delta_1$  使得  $-\bar{\delta}_2 + \delta_5 \gamma_1 < 0$ , 这里  $\delta_5$  由(6)给出. 令  $\delta = \min(\delta_0, |-\bar{\delta}_2 + \delta_5 \gamma_1|)$ ,  $\bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2$ . 定义一些辅助信号如下:

$$\dot{m}_1(t) = -\delta m_1(t) + \beta |y(t)|, \quad m_1(0) > 0, \quad (13)$$

$$\dot{m}_2(t) = -\delta m_2(t) + \bar{\beta} |u(t)|, \quad m_2(0) > 0. \quad (14)$$

其中  $\beta > 0, \bar{\beta} > 0$ . 显然  $m_1(t)$  和  $m_2(t)$  都大于零. 由此可推得

$$\|z_0(t)\| \leq M_1 m_1(t) + M_2 \quad (15)$$

及

$$\|z_1(t)\| \leq M_3 m_1(t) + M_4 m_2(t) + M_5. \quad (16)$$

其中  $M_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$  均是正常数. 式(15), 式(16)的证明见文[7].

为了完成控制目标, 引入如下一些辅助信号:

$$\dot{y}_1(t) = -\lambda_1 y_1(t) - \frac{1}{L_2(s)} u(t) + u_1(t), \quad (17)$$

$$e_1(t) = y(t) + y_1(t), \quad (18)$$

$$e_2(t) = -h(s)u_1(t) + \frac{1}{L_2(s)} u(t). \quad (19)$$

其中

$$h(s) = a^n / (s + a)^n, \quad a > 0. \quad (20)$$

由式(11), 式(17)及式(18)得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & -\lambda_1 e_1 + u_1(t) + \frac{R(s)}{L_2(s)} y(t) + \frac{1}{L_2(s)} (A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) \\ & + \Psi(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{N_i(s)}{L_2(s)} M_{2i}(y). \end{aligned} \quad (21)$$

由于  $\frac{1}{L_2(s)}, \frac{R(s)}{L_2(s)}, \frac{N_i(s)}{L_2(s)}$  都是稳定传递函数, 根据式(15), 式(16)可知, 存在正常数  $K_1, K_2, K_3, K_4$  使得

$$k_1(t) \geq \left| \frac{R(s)}{L_2(s)} y(t) + \frac{1}{L_2(s)} (A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{N_i(s)}{L_2(s)} M_{2i}(y) \right| + 1. \quad (22)$$

其中

$$k_1(t) = K_1 m_1(t) + K_2 |y(t)| + K_3 m_3(t) + K_4, \quad (23)$$

$$\dot{m}_3(t) = -\lambda_2 m_3(t) + \gamma(m_1(t) + m_2(t)), \quad \gamma > 0. \quad (24)$$

定义

$$s_1(t) = e_1(t) - \varnothing_1 \text{sat}(e_1(t)/\varnothing_1). \quad (25)$$

其中

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ \text{sgn}(x), & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

将  $e_1(t)$  作为模糊控制器的输入,  $u_1(t)$  作为模糊控制器的输出. 定义模糊控制规则如下:

$R_i^1$ : 若  $e_1$  是  $\tilde{E}_{i1}$ , 则  $u_1$  是  $\tilde{U}_{-i1}$ ,  $i = -2, \dots, 2$ ,  
 输入  $e_1$  是  $\tilde{E}_{i1}$ ,

输出  $u_1$  是  $\tilde{U}_{-i1}$ .

其中模糊集  $\tilde{E}_{i1}, \tilde{U}_{-i1}$  的隶属函数如图 1 和图 2 所示 ( $j=1$ ).  $\varnothing_1 > 0$  是边界层宽度. 适当选择  $\varnothing_1$  能够消除控制信号的颤动.  $k_1, s_1$  分别由 (23), (25) 给出.

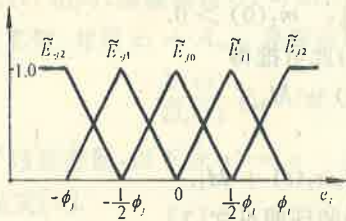


图 1 输入模糊集的隶属函数  $n^* \geq 2$

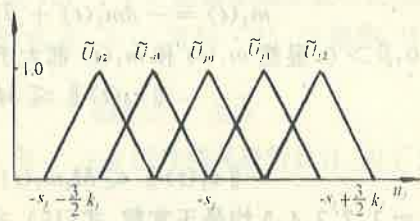


图 2 输出模糊集的隶属函数  $n^* \geq 2$

由第  $i$  条规则得到的模糊关系为:

$$\tilde{R}_i^1 = \tilde{E}_{i1} \times \tilde{U}_{-i1},$$

即

$$\tilde{R}_i^1(e_1, u_1) = \tilde{E}_{i1}(e_1) \wedge \tilde{U}_{-i1}(u_1). \quad (26)$$

其中  $\times$  表示笛卡尔积,  $\wedge$  表示  $\min$  运算,  $\tilde{E}_{i1}(e_1), \tilde{U}_{-i1}(u_1)$  分别表示模糊集  $\tilde{E}_{i1}, \tilde{U}_{-i1}$  的隶属函数, 总的模糊规则所对应的模糊关系:

$$\tilde{R} = \bigcup_{i=-2}^2 \tilde{R}_i^1,$$

即

$$\tilde{R}(e_1, u_1) = \bigvee_{i=-2}^2 [\tilde{E}_{i1}(e_1) \wedge \tilde{U}_{-i1}(u_1)]. \quad (27)$$

其中  $\vee$  表示  $\max$  运算. 采用  $\max$ - $\min$  推理合成规则和单元集模糊化方法<sup>[8]</sup>, 不难推出模糊集  $\tilde{U}_1$  的隶属函数为

$$\tilde{U}_1(u_1) = \bigvee_{i=-2}^2 [\tilde{E}_{i1}(e_1) \wedge \tilde{U}_{-i1}(u_1)]. \quad (28)$$

采用重心非模糊化方法, 可将模糊控制器输出  $\tilde{U}_1$  化为精确的控制量

$$u_1 = \frac{\int_{-s_1 - \frac{3}{2}k_1}^{-s_1 + \frac{3}{2}k_1} u_1 \tilde{U}_1(u_1) du_1}{\int_{-s_1 - \frac{3}{2}k_1}^{-s_1 + \frac{3}{2}k_1} \tilde{U}_1(u_1) du_1}. \quad (29)$$

由图 1, 图 2 及式 (28), (29), 不难得出模糊控制器输出的精确控制量为

$$u_j = \begin{cases} -s_j + k_j, & p_j \leq -1, \\ -s_j + \frac{3p_j^2 + 5.5p_j + 1.5}{4p_j^2 + 6p_j + 1} k_j, & -1 < p_j \leq -0.5 \\ -s_j + \frac{p_j^2 + 1.5p_j}{4p_j^2 + 2p_j - 1} k_j, & -0.5 < p_j \leq 0, \\ -s_j - \frac{p_j^2 - 1.5p_j}{4p_j^2 - 2p_j - 1} k_j, & 0 < p_j \leq 0.5, \\ -s_j - \frac{3p_j^2 - 5.5p_j + 1.5}{4p_j^2 - 6p_j + 1} k_j, & 0.5 < p_j \leq 1, \\ -s_j - k_j, & p_j > 1. \end{cases} \quad (30)$$

其中  $p_j = e_j / \varnothing_j$ ,  $k_j$  ( $j = 1$ ) 和  $s_j$  ( $j = 1$ ) 分别由式(23), 式(25) 给出. 采用类似于[6] 中的分析方法, 不难证明  $s_1(t)$  在有限时间后将收敛到零, 即有限时间后  $|e_1(t)| \leq \varnothing_1$ . 由式(17) ~ (19) 得

$$\begin{aligned} u_1(t) &= (s + \lambda_1)y_1(t) + \frac{1}{L_2(s)}u(t), \\ e_2(t) &= \frac{1}{L_2(s)}[-L_2(s)h(s)u_1(t) + u(t)] \\ &= \frac{1}{L_2(s)}[u(t) - L_2(s)h(s)(s + \lambda_1)e_1(t) + h(s)d(t)]. \end{aligned} \quad (31)$$

其中 
$$d(t) = R(s)y(t) + A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t) + \Psi(t) + \sum_{i=1}^n N_i(s)M_{2i}(y). \quad (32)$$

定义  $e_3(t) = L_3(s)e_2(t)$ , 其中  $L_3(s) = \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i)$ . 当  $n^* \leq 2$  时, 取  $L_3(s) = 1$ , 于是

$$\dot{e}_3(t) = -\lambda_2 e_3(t) + u(t) - L_2(s)h(s)(s + \lambda_1)e_1(t) + h(s)d(t). \quad (33)$$

由于  $h(s)L_2(s)$  和  $h(s)$  都是稳定的传递函数, 根据(15), (16) 可知, 存在正常数  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  使得

$$k_3(t) \geq |D_1(s)h(s)e_1(t) + h(s)d(t)| + 1. \quad (34)$$

其中

$$k_3(t) = \rho_1 m_1(t) + \rho_2 |y(t)| + \rho_3 m_3(t) + \rho_4. \quad (35)$$

定义

$$s_3(t) = e_3(t) - \varnothing_3 \text{sat}(e_3(t)/\varnothing_3). \quad (36)$$

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ \text{sgn}(x), & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

将  $e_3(t)$  作为另一个模糊控制器的输入,  $u_3(t) = u(t)$  作为该模糊控制器的输出. 定义模糊控制规则如下:

$$R_i^3: \quad \begin{array}{l} \text{若 } e_3 \text{ 是 } \tilde{E}_{3i}, \\ \text{输入 } e_3 \text{ 是 } \tilde{E}_3, \end{array} \quad \text{则 } u_3 \text{ 是 } \tilde{U}_{-3i}, \quad i = -2, \dots, 2,$$

输出  $u_3$  是  $\tilde{U}_3$ .

其中模糊集  $\tilde{E}_{3i}, \tilde{U}_{-3i}$  的隶属函数如图 1 和图 2 所示 ( $j = 3$ ),  $\varnothing_3 > 0$  是边界层宽度, 适当选择  $\varnothing_3$  能够消除控制信号的颤动.  $k_3, s_3$  分别是(35), (36) 给出. 根据图 1、图 2 并采用上面同样

的模糊化和非模糊化方法,该模糊控制器的输出  $\tilde{U}_3$  可化为精确的控制量

$$u = u_3. \quad (37)$$

其中  $u_3$  由式(30)取  $j = 3$  确定  $p_3 = e_3/\delta_3$ ,采用类似于[6]中稳定性分析方法,不难证明在有限时间内,  $s_3(t)$  将收敛到零,即有限时间后  $|e_3(t)| \leq \delta_3$ .

### 3.2 稳定性分析 $n^* \geq 2$

取李亚普诺夫函数

$$V(t) = \frac{1}{2} [l_1 m_1^2(t) + l_2 m_2^2(t) + l_3 m_3^2(t) + y^2(t)]. \quad (38)$$

其中  $l_1, l_2, l_3$  是适当的正常数.将  $V(t)$  关于时间  $t$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= l_1 m_1(t) \dot{m}_1(t) + l_2 m_2(t) \dot{m}_2(t) + l_3 m_3(t) \dot{m}_3(t) + y(t) \dot{y}(t), \\ &\leq -l_1 \delta m_1^2(t) + l_1 \beta m_1(t) |y(t)| - l_2 \delta m_2^2(t) + l_2 \bar{\beta} m_2(t) |u(t)| - l_3 \lambda_2 m_3^2(t) \\ &\quad + l_3 \gamma m_3(t) [m_1(t) + m_2(t)] - \lambda_1 y^2(t) + |y(t)| |d_1(t)|. \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{1}{L_2(s)} u(t) + \frac{R(s)}{L_2(s)} y(t) + \frac{1}{L_2(s)} (A_{10}^T z_0 + \varnothing(z_0, z_1, t)) \\ &\quad + \Psi(t) + \sum_{i=1}^{n^*} \frac{N_i(s)}{L_2(s)} M_{2i}(y). \end{aligned} \quad (40)$$

由于  $\frac{1}{L_2(s)}, \frac{R(s)}{L_2(s)}, \frac{N_i(s)}{L_2(s)}$  都是稳定的传递函数,根据式(16)可知,存在正常数  $\rho_1', \rho_2', \rho_3', \rho_4'$  使得

$$|d_1(t)| \leq \rho_1' m_1(t) + \rho_2' m_2(t) + \rho_3' m_3(t) + \rho_4'. \quad (41)$$

由于存在时间常数  $t_2$  使得  $|e_3(t)| \leq \delta_3, \forall t \geq t_2$ , 从而有

$$|u(t)| \leq \rho_1 m_1(t) + \rho_2 |y(t)| + \rho_3 m_3(t) + \rho_4, \quad \forall t \geq t_2.$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -l_1 \delta m_1^2(t) - l_2 \delta m_2^2(t) - l_3 \lambda_2 m_3^2(t) - \lambda_1 y^2(t) + l_1 \beta m_1(t) |y(t)| \\ &\quad + l_3 \gamma m_3(t) [m_1(t) + m_2(t)] + l_2 \bar{\beta} m_2(t) [\rho_1 m_1(t) + \rho_2 |y(t)| + \rho_3 m_3(t) + \rho_4] \\ &\quad + |y(t)| [\rho_1' m_1(t) + \rho_2' m_2(t) + \rho_3' m_3(t) + \rho_4']. \end{aligned} \quad (42)$$

于是对于选定的  $\delta > 0$ , 取  $\beta \ll \delta, \bar{\beta} > 0, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, \gamma \ll \lambda_2, a \gg \lambda_2$  再取适当的正常数  $l_1, l_2, l_3$ , 式(42)中关于  $m_1, m_2, m_3, |y|$  的二次齐次多项式一定是负定的,从而不难证明  $V(t)$  是有界的,因此  $m_1, m_2, m_3, |y|$  均有界,这意味着  $\|z_0\|, \|z_1\|$  有界,即  $\|x\|$  有界.

由此得出下面稳定性定理:

**定理** ( $n^* \geq 2$ ) 考虑过程(1),其控制律由式(13)(14),式(23)~(25),式(30)及式(35)~(37)构成并满足假设 A1, A2, 则由式(1),式(13)(14),式(23)~(25),式(30)及式(35)~(37)组成的闭环系统是 BIBO 稳定的.

## 4 仿真结果

下面我们将通过一个仿真例子来说明所提模糊控制算法的有效性.

**例** 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y \sin t, \\ \dot{x}_2 = x_3 + y \cos t, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 + u + \varnothing(x_1, x_2, x_3, t) + \psi(t), \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases} \quad (43)$$

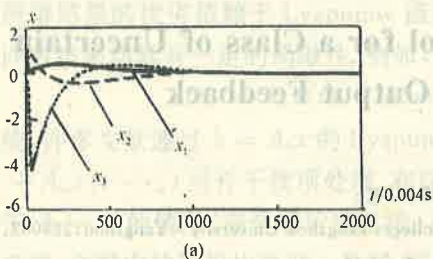
其中  $\varnothing(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 + x_2 + x_3, \psi(t) = 2\sin t + 0.5\cos t$ . 建模线性部分的传递函数是  $(s+2)/(s^3-s^2-2s-1)$ , 这是一个  $n^* = 2$  的不稳定系统, 这时  $e_2 = e_3$ .

取  $K_1 = 8, K_2 = 10, K_3 = 5, K_4 = 8, \rho_1 = 10, \rho_2 = 8, \rho_3 = 1.5, \rho_4 = 10, \delta_3 = 1.5, \beta = 3, \bar{\beta} = 0.002, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \gamma = 1, a = 200, \varnothing_1 = 0.01, \varnothing_3 = 0.02$ . 采样周期为  $0.004s$ , 初始状态取为  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0, m_1(0) = m_2(0) = m_3(0) = 0.5$ . 仿真结果如图 3(a) 和 (b) 所示. 若我们取控制律如下:

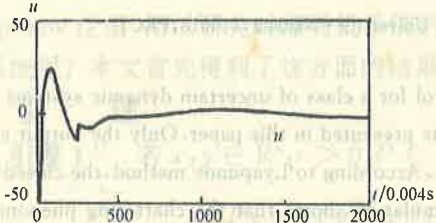
$$u_1 = -e_1 - k_1 \operatorname{sgn}(e_1), \quad (44)$$

$$u = -e_2 - k_3 \operatorname{sgn}(e_2). \quad (45)$$

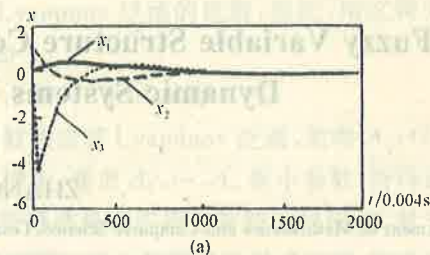
其中  $e_1, e_2, k_1$  和  $k_3$  分别由 (18), 式 (19), 式 (23) 和式 (35) 给出, 这是一个常规 VSC. 若所有其它条件同上, 仿真结果如图 4(a) 和 (b) 所示.



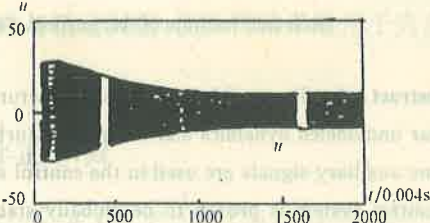
(a)



(b)

图 3 模糊控制系统的状态和控制信号  $n^* = 2$ 

(a)



(b)

图 4 常规变结构控制系统的状态和控制信号  $n^* = 2$ 

上面的仿真结果表明本文提出的模糊控制算法对降低颤动是非常有效的. 另外, 闭环系统的性能和鲁棒性也是相当好的.

## 5 小 结

本文讨论了一类不确定系统的输出反馈模糊控制问题, 提出了一种只利用输出和一些辅助信号的模糊变结构控制设计方案. 通过理论分析, 证明了闭环系统是全局稳定的. 从仿真结果可以看出, 本文提出的模糊控制算法具有较强的鲁棒性. 由于采用了模糊逻辑切换, 柔化了控制信号, 从而抑制了通常滑模控制所产生的颤动现象.



## 参 考 文 献

- [1] Lee, C. C. . Fuzzy Logic in Control Systems; Fuzzy Logic Controller-Part I, Part II. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. , 1990, 20(2): 404-435
- [2] Utkin, V. I. Variable Structure Systems with Sliding Mode. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1977, AC-22(2): 212-222
- [3] Emelyanov, S. V. , Korovin, S. K. , Nersisian, A. L. and E. Y. Nisenzon. . Output Feedback Stabilization of Uncertain Plants; A Variable Structure Systems Approach. Int. J. Control, 1992, 55(1): 61-81
- [4] Hwang, G. C. and Chang, S. . A Stability Approach to Fuzzy Control Design for Nonlinear System. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 48(2): 279-287
- [5] Palm, R. . Robust Control by Fuzzy Sliding Mode. Automatica, 1994, 30(9): 1429-1437
- [6] 张天平, 冯纯伯. 一类非线性系统的输出反馈模糊滑模控制. 中国控制会议论文集, 北京: 中国科学技术出版社, 1995, 1026-1031
- [7] 张天平. 不确定动态系统的模糊控制. 东南大学博士论文, 南京, 1995
- [8] Driankov, D. , Hellendoom, H. and Reinfrank, M. . An Introduction to Fuzzy Control. New York: Springer-Verlag, 1993

## Fuzzy Variable Structure Control for a Class of Uncertain Dynamic Systems Via Output Feedback

ZHANG Tianping

(Department of Mathematics and Computer Science, Teachers College, Yangzhou University · Yangzhou, 225002, PRC)

FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210018, PRC)

**Abstract:** A scheme of fuzzy variable structure control for a class of uncertain dynamic systems with nonlinear unmodeled dynamics and external disturbances is presented in this paper. Only the output signal and some auxiliary signals are used in the control scheme. According to Lyapunov method, the closed-loop fuzzy control system is proven to be globally stable. Simulation shows that the chattering phenomenon which is inherent to a sliding mode control is avoided, and the control system exhibits strong robustness.

**Key words:** fuzzy control; variable structure control; uncertain dynamic systems; robustness stability

### 本文作者简介

**张天平** 1964年生. 1986年毕业于扬州师范学院数学系, 后留校任教. 1992年获华东师大数学系运筹学与控制论专业硕士学位. 1996年获东南大学博士学位. 目前从事自适应控制, 模糊控制理论及应用、非线性控制等研究工作.

**冯纯伯** 见本刊1996年第1期第17页.