第13卷第4期
1996年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 4
Aug., 1996

含结构参数扰动的线性连续系统的鲁棒约束方差状态估计*

王子栋　郭　治

(南京理工大学自动控制系·南京，210094)

摘要：本文考虑含结构参数扰动的线性连续随机系统的鲁棒约束方差状态估计问题，即设计滤波增益，使受扰系统每个状态分量的估计误差方差的稳态值不大于预先给定值，同时滤波矩阵具有期望的稳定裕度. 本文给出了上述性能鲁棒滤波增益的存在条件及解析表达式，并提供了相应的数值例子.

关键词：线性连续随机系统；结构参数扰动；约束方差估计；鲁棒状态估计

1　引　言

在状态估计领域中，系统的性能指标常常表现为状态估计误差方差的上限的形式，如具有跟踪门约束的机动目标跟踪问题[1]以及具有相关区域约束的航迹识别问题[2]等. 传统的状态估计方法应用于该类问题通常较为困难，而文献[3]提出的误差协方差配置估计理论则为这种约束方差估计问题的解决提供了更为直接有效的方法. 另一方面，按照系统标称参数设计的滤波增益可能因为建模误差而达不到预期性能. 为此，本文研究含有不确定性的线性随机系统的鲁棒约束方差状态估计问题，给出了期望的性能鲁棒滤波增益的存在条件及解析表达式.

2　问题的描述

考虑如下连续不确定线性定常随机系统：

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\sigma)]x(t) + Bu(t) + v(t), \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + w(t). \tag{1b}$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ 分别为状态、确定性输入及测量输出. $v(t)$ 和 $w(t)$ 为不相关的高斯白噪声过程，且分别有强度 $V > 0$ 和 $W > 0$. 初始状态 $x(0)$ 有均值 $\bar{x}(0)$ 和协方差 $P(0)$，且与 $v(t)$ 及 $w(t)$ 不相关. 扰动 $\Delta A(\sigma)$ 为实值矩阵函数，σ 为一不确定参数向量，属于一紧集.

本文假定参数扰动具有如下时不变结构[4]：

$$\Delta A(\sigma) = MF(\sigma)N.$$

其中 M, N 为适维已知常数阵，$F(\sigma) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 满足

$$F(\sigma) \in \mathscr{F} = \{F(\sigma): F(\sigma)F^{\mathrm{T}}(\sigma) \leqslant I, F(\sigma) \text{ 的元素 Lebesgue 可测}\}.$$

若 $F(\sigma) \in \mathscr{F}$，则称 $\Delta A(\sigma)$ 或 $F(\sigma)$ 是可允许的.

状态估计向量 $\hat{x}(t)$ 满足

* 国家自然科学基金及高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于1993年11月23日收到，1994年12月2日收到修改稿.

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A + \Delta A(\sigma)]\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)). \tag{2}$$

其估计误差的稳态协方差

$$P \triangleq \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} E[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t)) - \hat{x}(t))^{\mathrm{T}}]. \tag{3}$$

由(2)(3)可得

$$\dot{P}(t) = (A + \Delta A(\sigma) - KC)P(t) + P(t)(A + \Delta A(\sigma) - KC)^{\mathrm{T}} + KWK^{\mathrm{T}} + V. \tag{4}$$

若滤波矩阵 $A + \Delta A(\sigma) - KC$ 对可允许的 $\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定，则在稳态时，有

$$[A_0 + \Delta A(\sigma)]P + P[A_0 + \Delta A(\sigma)]^{\mathrm{T}} + KWK^{\mathrm{T}} + V = 0. \tag{5}$$

其中 $A_0 \triangleq A - KC$.

这样，本文的目的在于设计滤波增益 K，使得

a) 滤波矩阵 $A_0 + \Delta A(\sigma)$ 具有期望稳定裕度 $\delta > 0$；

b) 稳态误差协方差 P 满足给定方差约束.

其中 σ_i^2 应不小于传统的最小方差估计获得最小方差.

$$[P]_{ii} \leqslant \sigma_i^2, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

3 主要结果及证明

定理 1 给定滤波矩阵的期望稳定裕度 $\delta(\delta > 0)$ 若存在参数 $\varepsilon > 0$. 使如下代数矩阵方程

$$A_0Q + QA_0^{\mathrm{T}} + 2\delta Q + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ + KWK^{\mathrm{T}} + V = 0. \tag{6}$$

有正定解 $Q > 0$，则

1) 滤波矩阵 $A_0 + \Delta A(\sigma)$ 对可允的 $\Delta A(\sigma)$ 有稳定裕度 δ.

2) 稳态误差协方差 P 存在且满足 $P \leqslant Q$. 这里，$P \leqslant Q$ 意味着 P-Q 半负定.

证 1) 注意到 $F(\sigma)F^{\mathrm{T}}(\sigma) \leqslant I$ 以及

$$\begin{aligned}&[\varepsilon^{\frac{1}{2}}MF(\sigma) - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}QN^{\mathrm{T}}][\varepsilon^{\frac{1}{2}}MF(\sigma) - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}QN^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\ &= \varepsilon MF(\sigma)F^{\mathrm{T}}(\sigma)M^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ - [\Delta A(\sigma)Q + Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)] \geqslant 0.\end{aligned} \tag{7}$$

从而有 $\Phi \triangleq \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ - [\Delta A(\sigma)Q + Q\Delta A^{\mathrm{T}}(\sigma)] \geqslant 0$，代入方程(6)得

$$[A_0 + \Delta A(\sigma) + \delta I]Q + Q[A_0 + \Delta A(\sigma) + \delta I]^{\mathrm{T}} + \Phi + KWK^{\mathrm{T}} + V = 0. \tag{8}$$

因 $\Phi + KWK^{\mathrm{T}} + V > 0$，由 Lyapunov 稳定性理论，结论 1) 得证.

2) 因滤波矩阵稳定，从而 P 存在且满足(5)，将(8)式减去(5)式得

$$[A_0 + \Delta A(\sigma)](Q - P) + (Q - P)[A_0 + \Delta A(\sigma)]^{\mathrm{T}} + \Phi + 2\delta Q = 0.$$

上式等价于

$$Q - P = \int_0^{\infty} e^{[A_0 + \Delta A(\sigma)]t}(\Phi + 2\delta Q)e^{[A_0 + \Delta A(\sigma)]^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t \geqslant 0. \tag{9}$$

即 $P \leqslant Q$. 证毕.

由定理 1 可知，若方程(6)关于某 $\varepsilon > 0$ 有解，且 $Q > 0$ 并满足 $[Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则滤波矩阵有稳定裕度 δ 且 $[P]_{ii} \leqslant [Q]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n)$，从而可达设计目的. 为此，需解决如下问题：

1° 正定阵 Q 可配置(即存在滤波增益 K 及 $\varepsilon > 0$，使方程(6)有解 $Q > 0$)的充要条件是什么？

2° 若正定阵 Q 可配置，则相应的配置该 Q(即使方程(6)有解 Q)的滤波增益的解析表达

式是什么?

定理 2　对给定的稳态方差约束 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 及稳定裕度指标 δ,满足 $[Q]_{ii}\leqslant\sigma_i^2$ 的正定阵 Q 为可配置的充要条件是:存在 $\varepsilon>0$ 使下式

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+2\delta Q-QC^{\mathrm{T}}W^{-1}CQ+\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ+V\leqslant 0. \tag{10}$$

成立,且(10)式左端的秩不大于 p.

证　注意到

$$\begin{aligned}&KWK^{\mathrm{T}}-KCQ-QC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}+QC^{\mathrm{T}}W^{-1}CQ\\&=(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})W(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{11}$$

则方程(6)可写成

$$\begin{aligned}&-(AQ+QA^{\mathrm{T}}-QC^{\mathrm{T}}W^{-1}CQ+2\delta Q+\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN^{\mathrm{T}}NQ+V)\\&=(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})W(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})^{\mathrm{T}}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{12}$$

又因滤波增益 K 的维数为 $n\times p$ 且 $p\leqslant n$,故仅当(12)式左端关于某 $\varepsilon>0$ 半正定且其最大秩为 p 时,方程(12)有解 Q,即 Q 可配置.　　证毕.

定理 3　若给定的满足 $[Q]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2\cdots,n)$ 的正定阵 Q 可配置,则配置该 Q 的滤波增益 K 为

$$K=QC^{\mathrm{T}}W^{-1}+TUW^{-\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

其中 $T\in\mathrm{R}^{n\times p}$ 为(12)式左端的平方根因子,$U\in\mathrm{R}^{p\times p}$ 为任意正交阵.

证　由 T 的定义,我们有

$$TT^{\mathrm{T}}=[(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})W^{\frac{1}{2}}][(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})W^{\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}}.$$

从而 $TU=(K-QC^{\mathrm{T}}W^{-1})W^{\frac{1}{2}}$,$UU^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}U=I$,则定理得证.

定理 4　给定稳态误差方差的约束 $\sigma_i^2(i=1,2\cdots,n)$ 及滤波矩阵的期望稳定裕度 $\delta>0$. 若有正定阵 Q 满足 $[Q]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2\cdots,n)$ 及可配置条件(10)式(关于某 $\varepsilon>0$),则本文所考虑的鲁棒约束方差估计问题的解可由(13)式获得.

证　由定理 1,2,3 直接可得.

说明　在工程应用中,我们希望能从可配置条件(10)中直接解出正定阵 Q,进而从定理 3 求出期望滤波增益 K. 在维数较低时,我们可采用对 Q 及 ε 数值搜索的算法;在维数较高时,我们可将(10)式左端置为一维数为 $n\times n$ 的最大秩为 p 的半正定阵(通常为对角阵),然后求解这个 Riccati 方程. 因本文所考虑的实质上是一种多目标设计问题,故解的相容性问题及解法的收敛性尚待进一步深入研究.

4　数值例子

在机动目标跟踪滤波与预测问题中,常常希望设计滤波增益,使得在系统模型参数受扰的情形下,系统状态的估计值始终位于一预先给定的有效区域中,而这样的鲁棒性指标要求可转化为对系统状态的估计误差方差的约束,对滤波过程的过渡过程品质要求则可转化为对滤波矩阵的稳定裕度的要求.

设目标作等高等速直线运动,描述目标运动的状态 $x=(x_1,\dot{x}_1)^{\mathrm{T}}$,其中 x_1 和 $\dot{x}_1$ 分别为位置和速度分量. 状态方程和测量方程为

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(\sigma)]x(t)+v(t),$$

$$y(t)=Cx(t)+w(t).$$

这里

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$V=\begin{bmatrix}2.1478&0\\0&4.2723\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}0.0083&0\\0&0.0247\end{bmatrix},$$

$$\Delta A(\sigma)=MF(\sigma)N=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\sigma&0\\0&\sin\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

现欲设计鲁棒滤波增益 K,使

1) 滤波矩阵 $A-KC+\Delta A(\sigma)$ 对可允的 $\Delta A(\sigma)$ 渐近稳定,且裕度为 1.

2) 稳态误差协方差 P 满足 $[P]_{11}\leqslant 0.54$, $[P]_{22}\leqslant 1.12$.

由上节提供的方法,我们可得使可配置条件成立的正定阵 Q 及常数 ε 分别为

$$Q=\begin{bmatrix}0.5238&0\\0&1.0245\end{bmatrix},\quad \varepsilon=22.1351.$$

将 Q、ε 及 $U=I_2$ 代入(13)式可得

$$K=\begin{bmatrix}93.0706&0\\-4.1194&65.1651\end{bmatrix}.$$

经验证, $A-KC+\Delta A(\sigma)$ 的极点为: $\{-73.4324+\sin\sigma,\ -84.8033+\sin\sigma\}$ 且 $[P]_{11}\leqslant 0.4723$, $[P]_{22}\leqslant 0.8356$,从而指标要求得到满足,右图1为目标飞行曲线及跟踪曲线的比较图.仿真结果说明,本文设计方法是有效的,满足既定约束条件.

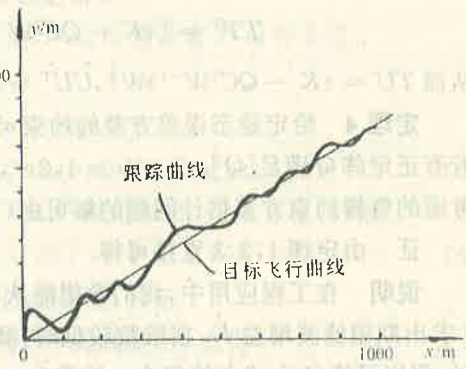

图1 目标飞行曲线与跟踪曲线比较图

5 结 论

本文考虑含结构参数扰动的线性连续随机系统的鲁棒约束方差状态估计问题,利用一修正的代数 Riccati 方程的正定解,使鲁棒稳定要求和鲁棒性能要求融于该方程中,从而将鲁棒滤波增益设计问题转化为辅助的矩阵配置问题,然后利用代数方法,给出了上述问题的完整解.进一步的研究将主要集中于解的相容性及解法的收敛性问题.

参 考 文 献

[1] 王子栋,郭治.离散系统的鲁棒约束方差估计及应用:模型噪声强度不确定情形.自动化学报,1996,22(3):339 — 343

[2] 单甘霖,王子栋,郭治.具有指定误差协方差的相关域预测方法.火力与指挥控制,1994,19(3):8 — 11

[3] Yaz,E. and Skelton,R. E.. Continuous and Discrete State Estimation with Error Covariance Assignment. Proc. 30th IEEE CDC,Brighton, England,1991,3091 — 3092

[4] Khargonekar,P. P. ,Petersen,I. R. and Zhou,K.. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control. IEEE Trans. Automat. Contr. ,1990,AC-35(3):356 — 361

Robust Variance-Constrained State Estimation for Linear Continuous Systems with Structured Parameter Perturbations

WANG Zidong　and　GUO Zhi

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing. 210094, PRC)

Abstract: This paper considers the problem of robust constrained variance state estimation for linear continuous stochastic systems with structured parameter perturbations. The problem is the design of filter gains such that the steady-state value of the estimation error variance for each state of the perturbed system is not more than the prespecified value, and the filter matrix possesses the desired stability margin, simultaneously. The conditions for the existence and the explicit expression of the desired robust filter gains are presented. A numerical example is used to demonstrate the applicability of the proposed approach.

Key word: linear continuous stochastic systems; structured perturbations; constrained variance estimation; robust state estimation

本文作者简介

王子栋　见本刊 1996 年第 2 期第 174 页.

郭　治　见本刊 1996 年第 2 期第 174 页.