

# 多变量 ARMA 信号自校正最优去卷平滑估计方法 及其渐近稳定性\*

张焕水

邓自立

(东北大学自动化研究中心·沈阳, 110006)

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080)

**摘要:** 本文讨论信号去卷估计问题, 运用新息理论和射影方法, 基于 ARMA 新息模型设计多变量 ARMA 信号最优去卷平滑器, 讨论了平滑器的渐近稳定性. 在信号模型及噪声统计未知时, 通过在线辨识 ARMA 新息模型提出了 ARMA 信号自校正去卷平滑器.

**关键词:** 多变量; 自校正; ARMA 信号平滑估计; 稳定性

## 1 引言

信号去卷(Deconvolution)估计的研究具有重要的理论意义和实际应用价值, 近来受到人们的关注<sup>[1-5]</sup>. 目前, 信号去卷平滑估计的研究尚有一定的不足或局限性, 文献[2]要求信号平稳且噪声统计已知; 文献[3]考虑的是一种特殊情形: 单变量系统; 文献[4]考虑了多变量信号去卷平滑估计问题, 但在实现自校正算法时要求信号为 AR 模型. 本文针对以上问题提出了一种有效算法, 并且分析了算法的渐近稳定性.

## 2 问题描述

考虑多变量 ARMA 信号

$$A'(q^{-1})s(t) = C'(q^{-1})\xi(t), \quad (2.1)$$

它通过如下线性系统被观测

$$P(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})s(t) + R(q^{-1})v(t). \quad (2.2)$$

其中  $s(t) \in \mathbb{R}^n, \xi(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^m, v(t) \in \mathbb{R}^m, \xi(t), v(t)$  是零均值方差阵为  $Q_\xi (> 0), Q_v (> 0)$  的不相关白噪声序列.  $A'(q^{-1}), C'(q^{-1}), P(q^{-1}), B(q^{-1}), R(q^{-1})$  为矩阵多项式,

$$A'(q^{-1}) = I_n + A'_1 q^{-1} + \dots + A'_{n_1} q^{-n_1}, \quad C'(q^{-1}) = C'_1 q^{-1} + \dots + C'_{n_1} q^{-n_1},$$

$$P(q^{-1}) = I_m + P_1 q^{-1} + \dots + P_{n_2} q^{-n_2}, \quad B(q^{-1}) = B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_2} q^{-n_2},$$

$$R(q^{-1}) = I_m + R_1 q^{-1} + \dots + R_{n_2} q^{-n_2}.$$

$I_n, I_m$  表示单位矩阵,  $A'_i q^{-1}$  是单位滞后算子.  $A'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, C'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_i \in \mathbb{R}^{m \times m}, B_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, R_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . (2.1) 可以非平稳, (2.2) 可以非稳定、非最小相位.

**最优去卷平滑问题:** 基于观测  $y(t+k), y(t+k-1), \dots, y(0)$  求 ARMA 信号  $s(t)$  的线性最小方差估值  $\hat{s}(t|t+k) (k > 0)$ .

**自校正去卷平滑问题:** 当  $A'(q^{-1}), C'(q^{-1})$  的系数阵未知; 噪声统计  $Q_\xi, Q_v$  未知时, 基于以上观测求  $s(t)$  的渐近最优估值  $\hat{s}(t|t+k)$ .

\* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1995 年 1 月 27 日收到, 1996 年 2 月 29 日收到修改稿.

### 3 最优去卷平滑器

#### 3.1 增广状态空间模型

将信号模型(2.1)式两边左乘  $\text{adj}A'(q^{-1})$  得

$$\text{adj}A'(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})\xi(t), \quad (3.1)$$

其中  $a(q^{-1}) = \det A'(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$ ;  $n_a = n_1 n$ ,

$$C(q^{-1}) = \text{adj}A'(q^{-1})C'(q^{-1}) = C_1 q^{-1} + \dots + C_{n_c} q^{-n_c}; \quad n_c = n_a.$$

上式中  $\text{adj}, \det$  表示伴随阵和行列式, 记

$$w(t) = C(q^{-1})\xi(t+1), \quad (3.2)$$

(3.1)式可以表示成如下状态空间模型

$$\eta(t+1) = A\eta(t) + Cw(t), \quad (3.3)$$

$$s(t) = H_2\eta(t). \quad (3.4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 I_n & & & \\ -a_2 I_n & I_{(n_a-1)n} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n_a} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = [I_n \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

上式中  $I_{(n_a-1)n}$  表示  $(n_a-1)n$  阶单位矩阵, (2.2)式可以表示成如下状态空间模型.

$$\beta(t+1) = P\beta(t) + Bs(t) + Rv(t), \quad (3.5)$$

$$y(t+1) = H_1\beta(t) + v(t). \quad (3.6)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} -P_1 & & & \\ -P_2 & I_{(n_a-1)n} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -P_{n_2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n_2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 - P_1 \\ R_2 - P_2 \\ \vdots \\ R_{n_2} - P_{n_2} \end{bmatrix}, \quad H_1 = [I_m \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

(3.3)~(3.6)式可写成如下增广状态空间模型

$$x(t+1) = Fx(t) + Le(t), \quad (3.7)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (3.8)$$

其中

$$x(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ BH_2 & P \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

$$H = [0 \quad H_1], \quad e(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

**假设 1** 系统(3.7), (3.8)完全可观测.

#### 3.2 ARMA 新息模型

由(2.2)及(3.1)两式易得

$$a(q^{-1})P(q^{-1})y(t) = M(q^{-1})\xi(t) + \Phi(q^{-1})v(t). \quad (3.9)$$

其中  $M(q^{-1}) = B(q^{-1})C(q^{-1})$ ,  $\Phi(q^{-1}) = a(q^{-1})R(q^{-1}) = I_m + \Phi_1 q^{-1} + \dots + \Phi_{n_\phi} q^{-n_\phi}$ ,  $n_\phi = n_a + n_2$ .

**假设 2** 谱密度矩阵

$$M(e^{i\omega})Q_\varepsilon M^T(e^{-i\omega}) + \Phi(e^{i\omega})Q_v\Phi^T(e^{-i\omega}) \text{ 正定 } (-\pi \leq \omega \leq \pi).$$

在假设 2 下我们有:

$$D(q^{-1})\varepsilon(t) = M(q^{-1})\xi(t) + \Phi(q^{-1})v(t). \tag{3.10}$$

其中  $D(q^{-1}) = I_m + D_1q^{-1} + \dots + D_{n_d}q^{-n_d}$  稳定,  $n_d = n_a + n_2$ .  $\varepsilon(t)$  是零均值, 方差为  $Q_\varepsilon$  的新息过程.

由 (3.9), (3.10) 式得 ARMA 新息模型

$$a(q^{-1})P(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t). \tag{3.11}$$

新息  $\varepsilon(t)$  由下式递推计算

$$\varepsilon(t) = -D_1\varepsilon(t-1) - \dots - D_{n_d}\varepsilon(t-n_d) + a(q^{-1})P(q^{-1})y(t), \tag{3.12}$$

初始值为  $\varepsilon(0), \varepsilon(1), \dots, \varepsilon(n_d - 1)$ .

### 3.3 最优去卷平滑器

在假设 1 下, 基于观测  $y(0), y(1), \dots, y(t+k)$  的最优平滑估值器  $\hat{x}(t|t+k)$  为<sup>[4]</sup>

$$\hat{x}(t|t+k) = \Omega^\# \begin{bmatrix} \hat{y}(t|t+k) - \hat{v}(t|t+k) \\ \hat{y}(t+1|t+k) - HL\hat{e}(t|t+k) - \hat{v}(t+1|t+k) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+n_f-1|t+k) - \sum_{i=0}^{n_f-2} HF^{n_f-i-2}L\hat{e}(t+i|t+k) \\ -\hat{v}(t+n_f-1|t+k) \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

其中  $\Omega^\# = (\Omega^T\Omega)^{-1}\Omega^T, \Omega = [H^T \ F^T H^T \dots (F^T)^{n_f-1} H^T]^T$ . 应用射影性质得

$$\hat{x}(t|t+k) = \begin{bmatrix} \hat{\eta}(t|t+k) \\ \hat{\beta}(t|t+k) \end{bmatrix}, \quad \hat{s}(t|t+k) = H_2\hat{\eta}(t|t+k). \tag{3.14}$$

(3.13) 式中  $\hat{y}(t+i|t+k)$  是输出  $y(t+i)$  的最优预报估值 ( $i > k$ ),  $\hat{v}(t+i|t+k)$  和  $\hat{e}(t+i|t+k)$  是噪声  $v(t+i), e(t+i)$  的最优估值. 由 (3.14) 式易知  $\hat{s}(t|t+k)$  由  $\hat{x}(t|t+k)$  的部分分量组成, 即前  $n$  个分量. 因此计算  $\hat{s}(t|t+k)$  归结为计算 (3.13) 式中的输出预报估值  $\hat{y}(t+i|t+k)$  和噪声估值  $\hat{v}(t+i|t+k), \hat{e}(t+i|t+k)$ .

1) 噪声估值器  $\hat{v}(t+i|t+k), \hat{e}(t+i|t+k)$ .

注意到变换 (3.2), (3.10) 写成如下形式

$$D(q^{-1})\varepsilon(t) = b(q^{-1})w(t-1) + \Phi(q^{-1})v(t). \tag{3.15}$$

引理 1°  $v(t)$  与  $\varepsilon(t)$  的互协方差阵  $R_{v\varepsilon}(i)$  计算为

$$R_{v\varepsilon}(i) \triangleq E[v(t)\varepsilon^T(t+i)] = \begin{cases} 0, & i < 0, \\ Q_v F_i^T, & i \geq 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

其中  $F_j$  计算如下 
$$F_j = \sum_{i=1}^{\min(n_d, j)} D_i F_{j-i} + \Phi_j, \quad F_0 = I_m, \tag{3.17}$$

其中规定  $j > n_\varphi$  时  $\Phi_j = 0$ .

2° 假设  $B_{n_2}$  列满秩, 则  $w(t)$  与  $\varepsilon(t)$  的互协方差阵  $R_{w\varepsilon}(i) \triangleq E[w(t)\varepsilon^T(t+i)]$  计算为

$$R_{w\varepsilon}(i) = \begin{cases} 0, & i < -n_a + 3, \\ -B_{n_2}^\# \sum_{j=1}^{i+n_2-3} B_{n_2-j} R_{w\varepsilon}(i-j) + B_{n_2}^\# (D_{n_2-i+1} Q_\varepsilon - \sum_{j=0}^{i+n_2-1} \Phi_{n_d-j} Q_v F_{i+n_d-j-1}^T), & i \geq -n_a + 3. \end{cases} \tag{3.18}$$

其中

$$B_{n_2}^{\#} = (B_{n_2}^T B_{n_2})^{-1} B_{n_2}^T.$$

应用以上引理,根据射影公式,白噪声  $v(t)$  及有色噪声  $w(t)$  的最优估值分别计算为

$$\begin{aligned} \hat{v}(t+i|t+k) &= \sum_{j=0}^{k-i} R_{ve}(j) Q_e^{-1} \epsilon(t+i+j) \\ &= \sum_{j=0}^{k-i} Q_v F_j^T Q_e^{-1} \epsilon(t+i+j), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\hat{w}(t+i|t+k) = \sum_{j=0}^{k-i+n_a-3} R_{we}(j-n_a+3) Q_e^{-1} \epsilon(t+i+j-n_a+3). \quad (3.20)$$

(3.20)式中的  $R_{we}(j-n_a+3)$  由引理给出的递推公式计算,故噪声  $e(t)$  的最优估值计算为

$$\hat{e}(t+i|t+k) = \begin{bmatrix} \hat{w}(t+i|t+k) \\ \hat{v}(t+i|t+k) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

2) 输出预报估值器  $y(t+i|t+k)$ .

当  $i \leq k$  时  $\hat{y}(t+i|t+k) = y(t+i)$ ,  $i > k$  时  $\hat{y}(t+i|t+k)$  由下式计算<sup>[1]</sup>

$$a(\bar{q}^{-1})P(\bar{q}^{-1})\hat{y}(t+i|t+k) = D(\bar{q}^{-1})\hat{e}(t+i|t+k). \quad (3.22)$$

上式中  $i \leq k$  时  $\hat{e}(t+i|t+k) = \epsilon(t+i)$ ,  $i > k$  时  $\hat{e}(t+i|t+k) = 0$ .  $\bar{q}^{-1}$  只是对  $\hat{y}(t+i|t+k)$ ,  $\hat{e}(t+i|t+k)$  第一个时标运算,即  $\bar{q}^{-1}\hat{y}(t+i|t+k) = \hat{y}(t+i-1|t+k)$ ,  $\bar{q}^{-1}\hat{e}(t+i|t+k) = \hat{e}(t+i-1|t+k)$ . 总结以上的讨论得如下定理:

**定理 1** 在假设 1 及假设 2 下,ARMA 信号最优去卷平滑器的计算由如下两步组成.

1° 首先由谱分解得  $D(\bar{q}^{-1})$  及  $Q_e$ ; 由 (3.12) 式计算新息估值,根据新息估值由 (3.19) ~ (3.22) 式计算噪声估值及输出预报估值.

2° 将以上有关估值代入 (3.13) 式计算状态平滑估值  $\hat{x}(t|t+k)$ , 则  $\hat{x}(t|t+k)$  的前  $n$  个分量即为  $\hat{s}(t|t+k)$ .

#### 4 渐近稳定性

以上算法中新息递推公式 (3.12) 式要选取初始值  $\epsilon(0), \epsilon(1), \dots, \epsilon(n_d-1)$ , 但在实际问题中这些初始值一般是不知道的, 因此讨论算法对于初始值的选取是否渐近稳定是一个具有实际意义的问题.

**定理 2** 上一节提出的最优去卷平滑估计  $\hat{s}(t|t+k)$  对于新息初始值  $\epsilon(0), \epsilon(1), \dots, \epsilon(n_d-1)$  的选取渐近稳定, 即当  $t$  充分大以后, 初始值对  $\hat{s}(t|t+k)$  的影响可忽略不计.

**说明** 本节讨论的渐近稳定性是对新息初始值  $\epsilon(0), \epsilon(1), \dots, \epsilon(n_d-1)$  而言的, 它不同于 Kalman 滤波器渐近稳定性的意义.

#### 5 自校正去卷平滑器

本节中假设  $A'(q^{-1}), C'(q^{-1}), Q_e, Q_v$  未知. 引入新的观测  $y^0(t) = P(q^{-1})y(t)$ , (3.11) 式变为

$$a(q^{-1})y^0(t) = D(q^{-1})\epsilon(t). \quad (5.1)$$

运用 RELS 辨识 (5.1) 得  $t$  时刻估值  $\hat{a}_i(t), \hat{D}_i(t), \hat{\epsilon}_i(t), Q_v$  及  $Q_e$  的估值可计算如下<sup>[3,4]</sup>

$$\hat{Q}_e(t) = \hat{Q}_e(t-1) + \frac{1}{t}(\hat{\epsilon}(t)\hat{\epsilon}^T(t) - \hat{Q}_e(t-1)), \quad (5.2)$$

$$\hat{Q}_v(t) = R_{n_d}^{-1} \hat{D}_{n_d}(t) \hat{Q}_e(t) / \hat{a}_{n_d}(t). \quad (5.3)$$

将有关估值代入(3.19), (3.20), (3.22), (3.13), (3.14)式, 则得自校正平滑估值  $\hat{s}(t|t+k)$ .

## 6 仿真例子

输入信号及观测系统模型分别为

$$(I_2 + A'_1 q^{-1})s(t) = C'_1 \xi(t-1) \quad (6.1),$$

$$(I_2 + P_2 q^{-2})y(t) = (B_1 q^{-1} + B_2 q^{-2})s(t) + (I_2 + R_2 q^{-2})v(t). \quad (6.2)$$

其中 
$$A'_1 = \begin{bmatrix} 1.02 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = I_2, \quad R_2 = 0.5I_2, \quad Q_\xi = I_2, \quad Q_v = 0.25I_2.$$

易知 ARMA 信号  $s(t)$  非平稳, 线性系统(6.2)式非稳定且非最小相位.

由(3.13), (3.14)式解得信号  $s(t)$  的去卷平滑估计为:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t|t+2) = & (\hat{w}(t-1|t+2) - (a_1 - a_2)y(t+1) - a_2 y(t) \\ & - (a_1 - a_2)P_2 y(t-1) - a_2 P_2 y(t-2) + (a_1 - a_2)\hat{v}(t+1|t+2) \\ & + a_2 \hat{v}(t|t+2) + (a_1 - a_2)R_2 \hat{v}(t-1|t+2) \\ & + a_2 R_2 \hat{v}(t-2|t+2))/(1 - a_1 + a_2). \end{aligned} \quad (6.3)$$

仿真结果见图1至图3, 图1表明 RELS 参数估值  $\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t)$  分别逼近相应的真实值  $a_1 = -1.52, a_2 = 0.51$ , 图2和图3表明自校正去卷平滑器  $\hat{s}(t|t+2) = (\hat{s}_1(t|t+2) \quad \hat{s}_2(t|t+2))^T$  对于真实信号  $s(t) = (s_1(t) \quad s_2(t))^T$  具有良好的跟踪性能.

## 7 结束语

将多变量 ARMA 信号模型转化为带标量系数自回归算子多项式的 ARMA 模型(3.1)式, 使用代换  $w(t) = C(q^{-1})\xi(t+1)$  使得平滑

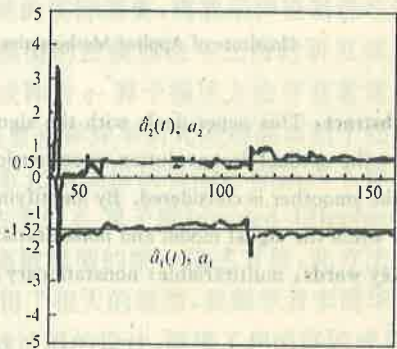


图1 RELS参数估计的收敛性

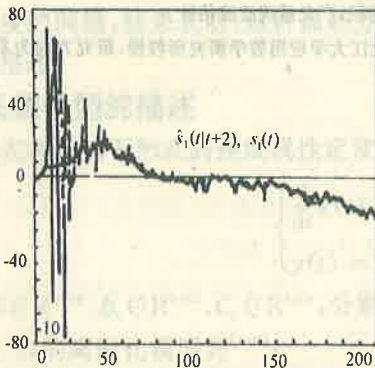


图2  $s_1(t)$  及平滑估计  $\hat{s}_1(t|t+2)$

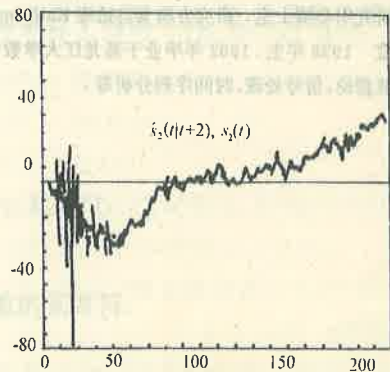


图3  $s_2(t)$  及平滑估计  $\hat{s}_2(t|t+2)$

估值中没有出现未知的多项式矩阵  $A'(q^{-1}), C'(q^{-1}), C(q^{-1})$  及方差阵  $Q_\xi$ , 通过辨识 ARMA 新息模型(5.1)式解决了多变量 ARMA 信号自校正去卷平滑估计问题, 克服了文献[4]的局限性, 推广了文献[3]的结果, 另外还讨论了算法的渐近稳定性.

## 参 考 文 献

- [1] 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989
- [2] Ahlen, A. and Sternal, M.. Wiener Filter-Design Using Polynomial Equations. IEEE. Trans. Signal Processing, 1991, 39: 2387—2389
- [3] 邓自立, 张焕水. 非平稳 ARMA 信号自校正去卷平滑器. 1993 中国控制与决策学术年会论文集, 沈阳: 东北大学出版社, 1993
- [4] 邓自立, 张焕水. 多通道最优和自校正去卷估值器. 控制理论与应用, 1995, 12(2): 214—218
- [5] 邓自立, 张焕水. 多变量自校正去卷滤波器. 控制与决策, 1993, 8(2): 101—106

## Self-Tuning Optimal Deconvolution Smoothing Method for Multivariable ARMA Signal and Its Asymptotic Stability

ZHANG Huanshui

(Research Center of Automation, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

**Abstract:** This paper deals with the signal deconvolution estimation problem. Using the innovation theory, the optimal deconvolution smoother for multivariable ARMA signal is presented. Also, the stability of the smoother is considered. By identifying ARMA innovation model, the self-tuning estimator is presented while the signal model and noise statistics are unknown.

**Key words:** multivariable; nonstationary; self-tuning; ARMA signal smoothing estimation; stability

### 本文作者简介

**张焕水** 1963年生. 1984年毕业于泰安师专数学系, 1991年于黑龙江大学应用数学研究所获硕士学位. 现为东北大学自动化研究中心博士生. 研究方向为自适应 Kalman 滤波理论, 反卷积, 广义系统滤波估计.

**邓自立** 1938年生. 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授, 研究方向为系统辨识, 自适应滤波理论, 信号处理, 时间序列分析等.

