第13卷第4期 控制理论与应用 Vol. 13, No. 4
1996年8月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Aug., 1996

线性定常系统的δ-算子描述——能控性与能稳性*

邹 云 杨成梧 翟长连
(南京理工大学动力工程学院·南京,210094)

摘要:本文讨论了δ-算子描述下的线性定常系统的能控性与能稳性问题.研究结果表明:虽然两种描述(即传统的q-算子描述和本文讨论的δ-算子描述)方法下的能控性定义及判据形式上并无二致,然而在高速采样的条件下,两种描述方法下的系统的能控度与能稳度呈现出完全相反的特性,一般而言,δ-算子描述方法更加适合高速采样情形.

关键词:δ-算子;能控性;能稳性;能控度;能稳度;线性系统

1 引 言

由于计算机技术的飞速发展和工业自动化等领域的实际需要,离散采样控制理论近年来得到了长足的进展.然而,迄今为止,有关离散化模型的控制理论与应用的研究结果表明[1]:当离散系统采样频率增高时,传统的移位算子或称为q-算子描述方法存在着诸多难以克服的缺陷:其一是离散化系统的模型参数并不随着采样频率的无限增高而趋于连续系统的相应参数;其二是随着采样频率的增高会使离散化系统出现极限环振荡和不稳定状态[2,3],为此,九十年代初Goodwin[1,4]等人建议引入古老的δ-算子或(divided-difference operator)来描述离散系统,使之成为联结连续模型与离散模型的统一描述方法,此方法已在最优滤波[5]、系统辨识[6]与状态空间实现[1]等领域取得了很大的成功,我国学者李渭华和萧德云等[2]也成功地将δ-算子描述方法用于故障检测滤波器的设计,取得了相当好的成果.

本文讨论和研究了δ-算子描述下的线性定常系统的能控性、能稳性的判定及其能控度与能稳度的问题,结果表明:这种描述方法的确更加适合于离散系统.尤其是数值采样系统的一般描述.

2 系统模型的描述

首先考虑如下形式的连续线性定常系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=A_cx(t)+B_cu(t),\\ y(t)=C_cx(t).\end{cases}\tag{2.1}$$

其中,$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$B_c\in\mathbb{R}^{n\times m}$,$C_c\in\mathbb{R}^{l\times n}$,分别为适当维数的实常阵.

(2.1)的离散化模型为[1,7]:

$$\begin{aligned}qx(k)&=A_qx(k)+B_qu(k),\\ y(t)&=C_qx(k).\end{aligned}\tag{2.2}$$

---

* 自然科学基金资助项目.

本文1994年12月19日收到.1995年9月11日收到修改稿.

式中,q 为移位算子,定义为

$$qx(k)=x(k+1), \tag{2.3}$$

若设 τ 为采样周期,则

$$A_q=e^{A_c\tau},\quad B_q=\int_0^\tau e^{A_c(\tau-t)}B_c\mathrm{d}t,\quad C_q=C_c, \tag{2.4}$$

(2.1)和(2.2)的 δ-算子形式描述为[1]:

$$\begin{cases}\delta x(k)=A_\delta x(k)+B_\delta u(k),\\ y(k)=C_\delta x(k).\end{cases} \tag{2.5}$$

式中,均差算子 $\delta(\cdot)$ 定义为:

$$\delta x(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t), & \tau=0,\\ [x(t+\tau)-x(t)]/\tau, & \tau\neq 0.\end{cases} \tag{2.6}$$

亦即

$$\delta=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, & \tau=0,\\ (q-1)/\tau, & \tau\neq 0,\end{cases} \tag{2.7}$$

而

$$A_\delta=\begin{cases}(A_q-1)/\tau, & \tau\neq 0,\\ A_c, & \tau=0,\end{cases}\quad B_\delta=\begin{cases}B_q/\tau, & \tau\neq 0,\\ B_c, & \tau=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

一个明显的性质是:A_δ,B_δ 均为 τ 的连续函数.

3 能控性与能稳性

显然,(2.5)的能控性与能稳性定义与相应于(2.1)和(2.2)的传统定义相一致,故不再赘述.此外,这里主要关心的是与采样周期 τ 有关的离散化系统,所以下面均假定 A_q 非奇异.

定理 1 系统(2.5)能控和能稳的充要条件分别为:对任意的有限复数 $s\neq\infty$ 有

$$\mathrm{rank}(sI-A_\delta,B_\delta)=n \tag{3.1}$$

和对任意的满足 $\mathrm{Re}s+\tau/2|s|^2\geqslant 0$ 的复数 s 有

$$\mathrm{rank}(sI-A_\delta,B_\delta)=n. \tag{3.2}$$

证 显然,由于系统(2.5)要么等价于(2.1)($\tau=0$ 时),要么等价于(2.2)($\tau\neq 0$ 时),所以它能控,当且仅当[7,8]:对任意复数 $s\neq\infty$,

$$\mathrm{rank}(sI-A_c,B_c)=n\quad(\tau=0), \tag{3.3}$$

或

$$\mathrm{rank}(sI-A_q,B_q)=n\quad(\tau\neq 0). \tag{3.4}$$

故注意到(2.8)和(3.3)便知(3.1)对 $\tau=0$ 时成立,现设 $\tau\neq 0$,则由(2.8)和(3.1)易知:

$$\mathrm{rank}(sI-A_\delta,B_\delta)=\mathrm{rank}\tau^{-1}(\lambda I-A_q,B_q). \tag{3.5}$$

式中:$\lambda=\tau s+1\neq\infty$ 为任意复数,从而由(3.4)知定理得证.这里有关能稳性的证明是完全类似的,故从略.

定理 1 说明 δ-算子描述的线性定常系统(2.5)的能控性无论在定义还是在判别法则上均与传统的描述方法完全一致,如(2.5)能控的另一个充要条件显然为:

$$\mathrm{rank}(B_\delta,A_\delta B_\delta,\cdots,A_\delta^{n-1}B_\delta)=n. \tag{3.6}$$

下面再看一下有关描述方法下各类模型的能控度与能稳度问题[9~11].

定义 1[11,14] 称

$$\mu_c \triangleq \inf\{\|(\Delta A, \Delta B)\| : (A_c + \Delta A, B_c + \Delta B)\ \text{不能控}\} \tag{3.7}$$

为系统(2.1)的能控度.

类似地可以定义有关系统(2.2)及(2.5)的能控度 $\mu_q(\tau)$ 和 $\mu_\delta(\tau)$，(3.7)具有两个意义，其一是当对条件(3.1)进行数值判定[12]时，条件(3.1)对计算机运算误差积累的容许度，其二是反映了以(A,B)为参数的线性定常系统对既定目标控制时所需反馈增益的大小[13]，文[14]还进一步指出了这种能控度在能控性子空间的计算上的意义. 应该指出的一点是：基于(3.1)的判别算法[15]无论计算量还是数值稳定性均要比判定(3.6)的有关算法好得多，而将数值秩的概念[10]引入其中更是如此. 这种思想还可推广应用到其它有关领域[17]. 所以本文只在定义1意义下对能控度展开讨论，而所得结论可以证明也适用于[9][10]等文中有关定义下的能控度.

定理 2　设(2.2)及(2.5)均为(2.1)的离散化系统，且(2.1)的能控度为 μ_c，则：

i)　相应于(2.2)的能控度，$\mu_q(\tau)$满足：

$$\mu_q(\tau) = o(\tau). \tag{3.8}$$

ii) 相应于(2.5)的能控度 $\mu_\delta(\tau)$满足：

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0}\mu_\delta(\tau) = \mu_c &= \min_{|s|\leqslant 1}\{\sigma_n(sI - A_c, B_c), \sigma_n(I - sA, B)\} \\ &= \min_{s\in c}\{\sigma_n(sI - A_c, B_c)\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

式中 $\sigma_n(\cdot)$为矩阵的最小奇值[11].

证　按定义和[11]知

$$\begin{aligned}\mu_q(\tau) &= \inf\{\|(\Delta A_q, \Delta B_q)\| : (A_q + \Delta A_q, B + \Delta B_q)\ \text{不能控}\} \\ &= \min_{|s|\leqslant 1}\{\sigma_n(sI - A_q, B_q), \sigma_n(I - sA_q, B_q)\} \leqslant \sigma_n(I - A_q, B_q)\} \\ &= \lambda_{\min}^{1/2}[(I - A_q, B_q)(I - A_q, B_q)^{\mathrm{H}}].\end{aligned} \tag{3.10}$$

式中上角"H"为共轭转置，$\lambda_{\min}^{1/2}(\cdot)$为矩阵最小特征值，从而由(2.4)和(3.10)可知

$$\mu_q(\tau) \leqslant \lambda_{\min}^{1/2}[I - e^{A\tau}, \int_0^\tau e^{A(\tau-t)}B\mathrm{d}t)(I - e^{A\tau}, \int_0^\tau e^{A(\tau-t)}B\mathrm{d}t)^{\mathrm{H}}]. \tag{3.11}$$

故由微积分中值定理可知：存在 $0<\xi, \eta\leqslant\tau$，使得

$$\begin{aligned}\mu_q(\tau) &\leqslant \lambda_{\min}^{1/2}[(-\tau A e^{A\xi}, \tau e^{A(-\eta)}(-\tau A e^{A\xi}, \tau e^{A(\tau-\eta)})^{\mathrm{H}}] \\ &\leqslant \tau[(\|A\| + 1)e^{\|A\|\tau}] \leqslant \tau e^{\|A\|}(\|A\| + 1), \quad (\tau\leqslant 1),\end{aligned} \tag{3.12}$$

由此即得(3.8).

至于(3.9)式，则只须注意到 $\sigma_n(\cdot)$对相关矩阵各元的连续性以及 A_δ, B_δ 关于 τ 的连续性，则由文[11]和[14]即可直接得到. 关于能稳度则可导出完全类似的结果(略).

4　结束语

本文主要讨论了 δ-算子描述下的线性定常系统的能控性与能稳性问题，得出在高速采样时，δ-算子所描述的系统其能控性与能稳性明显优于 q-算子所描述的系统. 关于能控度(3.7)的算法问题可参见[18].

参考文献

[1] Goodwin, G.C., Middleton, R.H. and Poor, H.V.. High-Speed Digital Signal Processing and Control. Proc. of the IEEE, 1992, 80(2): 240—258

[2] 李渭华,萧德云,方崇智. 基于δ算子的格形故障检测滤波器. 自动化学报, 1994, 20(4): 413—419

[3] Middleton R.H. and Goodwin, G.C.. Improved Finite Word Length Characteristics in Control Using Delta Operator. IEEE Trans, Automat. Contr., 1986, AC-31(11): 1015—1021

[4] Jabbari, F.. Lattice Filters for RLS Estimation of a Delta Operator-Based Model. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(7): 869—875

[5] Salgado, M., Middleton, R.H., and Goodwin, G.C.. Connection between Continuous and Discrete Riccati Equations with Applications to Kalman Filtering. IEEE Proc. D, 1988, 135: 28—34

[6] Vijayan, R., Poor, H.V., Moor, J.B. and Goodwin, G.C.. A Levinson Type Algorithm for Modeling Fast-Sampled Data. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(3): 314—321

[7] 何关钰. 线性系统理论. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1982, 142—157

[8] Mahmond, M.S. and Singh, M.G.. Discrete Systems, Analysis, Control and Optimization. Springer-Verlay, Berlin, 1984, 123—141

[9] 杨成梧,谭华林. 广义系统能控性的几个注记. 自动化学报, 1990, 16(3): 250—271

[10] 毛剑琴. 线性系统能控性、能观性的数值判断. 控制理论与应用, 1986, 3(1): 58—66

[11] Zou Yun and Yang Chengwu. Formula for the Distance between controllable and Uncontrollable Linear Systems. Syst. & Contr. Lett., 1993, 21: 173—180

[12] Eising, R.. Between Controllable and Uncontrollable. Syst. & Contr. Lett., 1985, 4: 263—264

[13] Boley, D.L. and Lu Wu-sheng. Measuring How Far a Controllable System is From an Uncontrollable One. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31: 249—251

[14] Boley, D.. A Perturbation Result for Linear Control Problems. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1985, 6: 66—72

[15] 杨成梧,邹云. 广义系统观控性及正则束条件的数值判定. 自动化学报, 1991, 17(4): 462—465

[16] 邹云,杨成梧. 能控广义系统到不能控广义系统集之间的距离. 自动化学报, 1991, 17(2): 220—224

[17] Zou Yun and Yang Chengwu. An Algorithm for the Computation of 2-D Eigenvalues. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(7): 1436—1439

[18] Wicks, M. and Decarlo, R.A.. Computing the Distance to an Uncotrollable System. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(1): 39—49

Controllability and Stabilizability of Linear Time-Invariant Systems in the Delta Operator Descriptions

ZOU Yun, YANG Chengwu and ZHAI Changlian

(School of Power Engineering & Dynamics, Nanjing University of Science & Technology · Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: In this paper, the problems of controllability and stabilizability for the linear time-inviariant systems based on delta operator model are discussed. It is shown that the controllability and stabilizability margins of this new model, at least in the case of high-speed sampling rate, is much more closed up to its continuous counterparts than that of the traditional models based on shift operators is, while the latter equal o(τ), where τ represents the sampling step. However, the corresponding criteria for the controllability and stability of the models are all the same as those traditional results in form.

Key words: delta-operator description; controllability; stabilizability; margins of controllability and stabilizablity; linear systems

本文作者简介

邹　云　1962 年生. 1983 年毕业于西北大学数学系，获理学学士学位，并于 1987 年和 1990 年在南京理工大学分获硕士和博士学位. 1990 年至今，在南京理工大学从事教学和科研工作，现为南京理工大学动力工程学院教授、美国《数学评论》评论员和美国国家数学学会会员. 近年来，主要研究方向集中在：复杂系统理论，H_∞ 控制，数字采样，控制和容错控制等领域，曾在国内外主要学术刊物上发表论文 40 余篇.

杨成梧　1936 年生. 1961 年毕业于哈尔滨军事学院，后一直在南京理工大学任教. 现为南京理工大学工程热物理与飞行力学系教授，博士生导师. 目前主要研究领域是广义系统，2-D 系统，H_∞ 控制理论，离散事件动态系统、非线性系统几何方法及正交函数理论及应用，高速采样控制等.

翟长连　1972 年生. 1994 年毕业于浙江大学数学系获理学学士学位，现为南京理工大学动力工程学院硕士研究生.

(上接第 499 页)

2° 重新建立类似于经典的 Bode 的工作和输入一输出轮廓的不确定性以容易处理的数学概念进行阐述，以及用严格的数学工具进行推导的尝试.

J. C. Doyle 等人的这本书是最先引入"新-经典"观点的专著之一，重点研究关于鲁棒性能的控制系统设计问题，强调非结构不确定性(在乘法摄动意义下)问题，同时给出了例子，说明结构不确定性的某些形式如何看作非结构不确定性的问题. 然后在第 2 章阐述信号与系统范数的定义，前者用时域范数 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$，和 $\|\cdot\|_\infty$，而后者用频域范数 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 来表示系统范数. 第 3 章介绍反馈控制理论的基本概念，包括内部稳定性(从输入一输出观点)的定义和条件；参考信号的渐近跟踪(即内模原理)，以及灵敏度函数等. 第 4 章的内容包括不确定性和鲁棒性质，强调非结构不确定性等问题. 接着，对于单输入一单输出连续时不变线性系统，导出了关于鲁棒性能的最新结果：在对象具有圆不确定性情况下，已知对象 $P \in \mathscr{P}$，控制器确保鲁棒性能(和鲁棒稳定性)的充要条件为

$$\| |\omega_1 S| + |\omega_2 T| \|_\infty < 1.$$

其中 $\mathscr{P} := \{P = (I + \Delta\omega_2)P_0 : \|\Delta\|_\infty < 1\}$，$S, T$ 分别为灵敏度函数和补灵敏度函数. 本书剩下部分主要是考虑如下问题：对已知对象 P(关于 P 有各种各样不同的标准假设与不确定性形式)，寻找控制器，它将确保系统的稳定性、性能、鲁棒稳定性以及鲁棒性能.

"Feedback Control Theory"一书提供了一个漂亮的条理清晰的控制理论近来发展的总结. 特别应指出的是它适合于从事这个学科领域的研究生与工程师们，是一本很有价值的参考书. 最后，再强调一下，这本书以廿世纪八十年代的"新-经典"观点，提供了控制理论领域的一个有价值的引论. 正因为这样，对于兴趣于从事解决实际控制问题的学生和工程师们，建议读一读，会有很大收获.