重力作用下柔性机械手臂滑动模控制器的鲁棒设计*

胡跃明 徐建闽 周其节 李志权
（华南理工大学自动化系·广州,510641） （香港理工大学电子工程系·香港九龙）

摘要：本文研究柔性机械手臂在竖直平面内的调节问题. 首先给出了在重力作用下滑动模的运动方程；进而得到了滑动模极点配置问题的显解；最后给出了在非匹配参数扰动下使滑动模具有良好动态品质的鲁棒极点配置方法，从而解决了早期工作中提出的关于滑动模控制器设计中的极点配置及鲁棒性问题，为滑动模控制方法应用于柔性机械手鲁棒控制问题奠定了理论基础.

关键词：柔性机械手臂；滑动模；极点配置；鲁棒性

1 引 言

近年来随着机器人技术的不断发展，人们迫切需要机器人具有更低的制造成本及能耗、更快而精确的响应及更高的负载能力等，因而使柔性机械手的动力学建模与控制问题成为机器人领域非常热门的研究课题之一. 人们尝试将各种传统控制方法应用于柔性机械手的控制问题. 但正如文[1]所述，这些方法均存在这样或那样的缺陷，尤其是对干扰因素比较敏感，鲁棒性能差等不足大大限制了这些方法的实用性.

滑动模控制方法由于具有对一类参数及系统不确定因素的不变性、算法简单且易于在线实现等优点而引起了控制界的重视. 文[1～4]将其应用于柔性机械手臂的控制问题，表明了滑动模控制器具有良好的鲁棒性能. 对于柔性机械手臂而言，与柔性模态有关的一些重要参数如固有频率、振型函数值等往往是难于测定的，尤其是在变负载工作环境下是随负载而变化的. 因此关于柔性模态部分的参数不确定性是不可避免的，并且不再满足所谓的滑动模不变性条件或匹配条件. 当参数变化范围已知时，由滑动模的到达条件很容易根据其变化界限确定出控制律保证在有限时间内实现滑动模运动[1]. 因此柔性机械手臂滑动模控制器设计中最关键的问题是要确定切换函数中的有关系数使得在非匹配参数扰动下滑动模具有良好的鲁棒性能，也即解决滑动模的鲁棒极点配置问题. 文[1,2]等对水平面内的调节及若干跟踪问题，证实了滑动模极点配置问题解的存在性，但对竖直平面内滑动模极点配置问题是否有解以及滑动模的鲁棒性均没有解决. 文[9]给出了水平面内滑动模的鲁棒极点配置方法. 但在竖直平面内，由于重力的作用而使滑动模的极点配置问题变得十分困难，至今仍未得到解决.

本文的目的是针对柔性机械手臂在竖直平面内的调节问题，证实文[1,2]等关于滑动模控制器设计中所涉及到的滑动模极点配置问题确实有解，并给出了解的表达式，然后讨论了滑动模的鲁棒性，给出了鲁棒极点配置方法. 从而从理论上解决了上述问题.

---

* 国家自然科学基金与广东省科学基金及教委留学回国人员基金资助项目.
本文于1995年5月3日收到. 1996年3月27日收到修改稿.

2　问题的提法

如图所示,设θ是柔性机械手臂的角位移;$\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_r)^{\mathrm{T}}\in R^r$是柔性模态坐标截断向量.由Lagrange原理可得在竖直平面内运动的单杆柔性机械手臂的动力学模型为[1]

$$\begin{cases} m_r\ddot{\theta}+\boldsymbol{m}_{rf}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{q}}=f_\theta-f_{g\theta}, \\ \boldsymbol{m}_{rf}\ddot{\theta}+\boldsymbol{m}_f\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{f}_q-\boldsymbol{f}_{gq}. \end{cases} \tag{2.1}$$

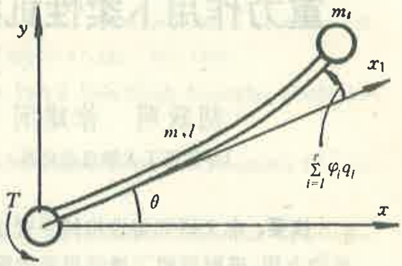

图1　柔性臂示意图

其中各项系数及函数及函数同文[1].

选取切换函数s为如下形式

$$\begin{cases} s=\dot{\theta}+v_1, \\ \dot{v}_1=p_0\dot{\theta}+\bar{p}_0\theta+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}+\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+kv_2, \\ \dot{v}_2=\theta+\dfrac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{r}\varphi_{je}q_j. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中$k,p_0,\bar{p}_0,\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_r)^{\mathrm{T}},\bar{\boldsymbol{p}}=(\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_r)^{\mathrm{T}}$是待定系数.

当(2.1)及(2.2)中有关参数的变化范围已知时,很容易由滑动模的到达条件$s\dot{s}<0$确定出所需的控制$T(t)$[1].假定手臂的弹性变形很小且工作空间限制在$\theta\in[-\frac{\pi}{2},0]$内,则当系统进入滑动模运动后,利用等价控制原理并略去有关非线性项,可得滑动模的近似方程为[1]

$$\begin{cases} \ddot{\theta}=-p_0\dot{\theta}-\bar{p}_0\theta-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}-\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+kv_2, \\ \ddot{q}_j=-B_j(\ddot{\theta}+h\theta)-A_jq_j-B_jh^*,\quad j=1,\cdots,r, \\ \dot{v}_2=\theta+\dfrac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{r}\varphi_{je}q_j. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{cases} h=2g/\pi l,\quad h^*=-g/l, \\ A_j=\dfrac{EI\int_0^l\varphi_j''^2\mathrm{d}x_1}{m_t\varphi_{je}^2+\rho a\int_0^l\varphi_j^2\mathrm{d}x_1}, \\ B_j=\dfrac{m_tl\varphi_{je}+\rho a\int_0^l x_1\varphi_j\mathrm{d}x_1}{m_t\varphi_{je}^2+\rho a\int_0^l\varphi_j^2\mathrm{d}x_1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

此处g表示引力常数;m_t为终端负载;ρa为柔性臂质量;EI为刚性系数;l为柔性臂长度;φ_j为振型函数,φ_{je}为φ_j在$x_1=l$处的值.

由文[1]知,A_j,B_j,φ_{je},满足下列关系

$$0<A_1<\cdots<A_r,\quad B_j\neq 0,\quad B_j\varphi_{je}\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,r. \tag{2.5}$$

(2.3)中的有关系数直接依赖于负载等不确定因素,一般情况下是不能准确量测的.为

此记$(\cdot)_0$为有关系数的已知或均值部分，则(2.3)可改写为下列形式

$$\begin{cases}\ddot{\theta}=-p_0\dot{\theta}-\bar{p}_0\theta-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}-\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-kv_2,\\ \ddot{q}_j=-(B_{j0}+\Delta B_j)(\ddot{\theta}+h\theta)-(A_{j0}+\Delta A_j)q_j-(B_{j0}+\Delta B_j)h^*,\\ \dot{v}_2=\theta+\dfrac{1}{l}\sum_{j=1}^{r}(\varphi_{je0}+\Delta\varphi_{je})q_j.\end{cases}\tag{2.6}$$

其中

$$\Delta A_j=A_j-A_{j0},\quad \Delta B_j=B_j-B_{j0},\quad \Delta\varphi_{je}=\varphi_{je}-\varphi_{je0},\quad j=1,\cdots,r.$$

且假定$A_{j0},B_{j0},\varphi_{je0}$满足(2.5).

显然关于柔性模态部分的未知参数扰动将影响滑动模运动，也即此时滑动模的不变性条件已不再满足.我们的目的是要根据(2.6)的名义系统(即无参数扰动情形)，确定出$2r+3$个未知系数$k,p_j,\bar{p}_j(j=0,1,\cdots,r)$使得(2.6)中的未知参数扰动在一定范围内变化时，滑动模亦具有良好的动态品质.将"$\ddot{\theta}$"视为滑动模系统的"输入"，则问题归结为(2.6)的鲁棒极点配置问题.

3　极点配置问题的显解

显然(2.3)的特征方程为

$$G(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda^2+p_0\lambda+\bar{p}_0 & p_1\lambda+\bar{p}_1 & p_2\lambda+\bar{p}_2 & \cdots & p_r\lambda+\bar{p}_r & k\\ B_1(\lambda^2+h) & \lambda^2+A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ B_2(\lambda^2+h) & 0 & \lambda^2+A_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ B_r(\lambda^2+h) & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2+A_r & 0\\ -1 & -\varphi_{1e}/l & -\varphi_{2e}/l & \cdots & -\varphi_{re}/l & \lambda\end{bmatrix}=0.\tag{3.1}$$

按最后一列展开得

$$G(\lambda)=\lambda\det\begin{bmatrix}\lambda^2+p_0\lambda+\bar{p}_0 & p_1\lambda+\bar{p}_1 & \cdots & p_r\lambda+\bar{p}_r\\ B_1(\lambda^2+h) & \lambda^2+A_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_r(\lambda^2+h) & 0 & \cdots & \lambda^2+A_r\end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{r+3}k\det\begin{bmatrix}B_1(\lambda^2+h) & \lambda^2+A_1 & 0 & \cdots & 0\\ B_2(\lambda^2+h) & 0 & \lambda^2+A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_r(\lambda^2+h) & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2+A_r\\ -1 & -\varphi_{1e}/l & -\varphi_{2e}/l & \cdots & -\varphi_{re}/l\end{bmatrix}.$$

将上面右端第一与第二个行列式分别按第一列与最后一行展开并整理得

$$G(\lambda)=(\lambda^2+p_0\lambda+\bar{p}_0)\lambda f(\lambda^2)+kf(\lambda^2)$$
$$-\sum_{j=1}^{r}B_j(p_j\lambda^2+\bar{p}_j\lambda+k\varphi_{je}/l)(\lambda^2+h)g_j(\lambda^2).\tag{3.2}$$

其中f,g_j定义为

$$f(\lambda^2)=\prod_{j=1}^{r}(\lambda^2+A_j),\quad g_j(\lambda^2)=\prod_{n\neq j}(\lambda^2+A_n),\quad j=1,\cdots,r. \tag{3.3}$$

而名义滑动模系统的特征多项式为

$$G_0(\lambda)=(\lambda^2+p_0\lambda+\bar{p}_0)\lambda f_0(\lambda^2)+kf_0(\lambda^2)$$
$$-\sum_{j=1}^{r}B_{j0}(\lambda^2+h)(p_j\lambda^2+\bar{p}_j\lambda+k\varphi_{je0}/l)g_{j0}(\lambda^2). \tag{3.4}$$

其中

$$f_0(\lambda^2)=\prod_{j=1}^{r}(\lambda^2+A_{j0}),\quad g_{j0}(\lambda^2)=\prod_{n\neq j}(\lambda^2+A_{n0}),\quad j=1,\cdots,r. \tag{3.5}$$

设 $\lambda_j,\lambda'_j(j=0,1,\cdots,r),\lambda_{r+1}$ 是 $2r+3$ 个指定的关于名义滑动模系统的互异极点，若 λ_j 为复极点，则取 λ'_j 为 λ_j 的复共轭.

引理 1 设 $F_i(\lambda)=\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}\lambda^j,i=1,2,(a_{ij}\in\mathrm{R})$，若存在 n 个互异数 d_j 使得 $F_1(d_j)=F_2(d_j)$，则必有 $F_1(\lambda)=F_2(\lambda),a_{1j}=a_{2j},j=0,1,\cdots,n-1$.

证 令 $F(\lambda)=F_1(\lambda)-F_2(\lambda)$，若结论不真，则 $F(\lambda)$ 为一次数小于或等于 $n-1$ 的非零多项式，显然实系数多项式 $F(\lambda)$ 最多只有 $n-1$ 个互异根，但由所设 $d_j(j=1,\cdots,n)$ 互异且 $F(d_j)=0$，也即 $F(\lambda)$ 有 n 个互异根存在，矛盾. 故结论成立.

定理 1 对上述给定互异极点，当

$$\beta\triangleq\sum_{j=1}^{r}\frac{B_{j0}\varphi_{je0}h}{A_{j0}l}\neq 1,\quad \alpha_{j0}\triangleq A_{j0}-h\neq 0,\quad j=1,\cdots,r \tag{3.6}$$

时，极点配置问题的解存在，且解为

$$\begin{cases} k=\dfrac{\Lambda_0}{A_0(1-\beta)},\quad p_0=\dfrac{k}{h}-\dfrac{\mathrm{Re}\Lambda_h}{hf_0(-h)},\quad \bar{p}_0=h+\dfrac{\mathrm{Im}\Lambda_h}{\sqrt{h}}f_0(-h),\\ p_j=\dfrac{k\varphi_{je0}}{A_{j0}l}-\dfrac{\mathrm{Re}\Lambda_j}{A_{j0}B_{j0}\alpha_{j0}g_{j0}(-1A_{j0})},\qquad j=1,\cdots,r,\\ \bar{p}_j=\dfrac{\mathrm{Im}\Lambda_j}{\sqrt{A_{j0}}B_{j0}\alpha_{j0}g_{j0}(-A_{j0})},\qquad j=1,\cdots,r.\end{cases}$$

其中 Re 与 Im 分别表示复数的实部与虚部；

$$\begin{cases}\Lambda_0=(-\lambda_{r+1})\prod_{j=0}^{r}\lambda_j\lambda'_j,\qquad A_0=\prod_{j=0}^{r}A_{j0},\\ \Lambda_h=(\sqrt{h}i-\lambda_{r+1})\prod_{j=0}^{r}[\lambda_j\lambda'_j-h-(\lambda_j+\lambda'_j)\sqrt{h}i],\quad i=\sqrt{-1},\\ \Lambda_j=(\sqrt{A_{j0}}i-\lambda_{r+1})\prod_{n=0}^{r}[\lambda_n\lambda'_n-A_{j0}-(\lambda_n+\lambda'_n)\sqrt{A_{j0}}i],\quad j=1,\cdots,r.\end{cases} \tag{3.9}$$

证 事实上，对给定的极点令

$$\Lambda(\lambda)=(\lambda-\lambda_{r+1})\prod_{n=0}^{r}[\lambda^2-(\lambda_n+\lambda'_n)\lambda+\lambda_n\lambda'_n]. \tag{3.9}$$

假定名义滑动模系统的特征多项式(3.4)有 $G_0(\lambda)=\Lambda(\lambda)$，令 $\lambda=0,\pm\sqrt{h}i,\pm\sqrt{A_{j0}}i$

$(j=1,\cdots,r)$，则

$$
\begin{cases}
k\prod_{j=1}^{r}A_{j0}-k\sum_{j=1}^{r}\left(\dfrac{B_{j0}\varphi_{je0}h}{A_{j0}l}\prod_{j=1}^{r}A_{j0}\right)=\Lambda(0)=\Lambda_0,\\
(\bar{p}_0-h\pm p_0\sqrt{h}\,i)(\pm\sqrt{h}\,i)f_0(-h)+kf_0(-h)=\Lambda(\pm\sqrt{h}\,i),\\
-B_{j0}(h-A_{j0})(-p_jA_{j0}\pm\bar{p}_j\sqrt{A_{j0}}i+k\varphi_{je0}/l)g_{j0}(-A_{j0})=\Lambda(\pm\sqrt{A_{j0}}i).
\end{cases}
$$

解上列方程即得(3.7)中的系数表达式. 于是对所得系数，当 $\lambda=0;\pm\sqrt{h}\,i,\pm\sqrt{A_{j0}}i(j=1,\cdots,r)$ 时，$G_0(\lambda)=\Lambda(\lambda)$. 由引理 1 知

$$G_0(\lambda)\equiv\Lambda(\lambda). \tag{3.10}$$

因此 $G_0(\lambda)$ 具有指定的特征值，也即名义滑动模系统具有指定的极点.　　证毕.

注 1　若有某个 j 使 $\alpha_{j0}=A_{j0}-h=0$，则由(3.4)知 $\lambda=\pm\sqrt{A_{j0}}i$ 是 $G_0(\lambda)=0$ 的根. 显然此时名义滑动模系统的极点不可能配置到左半开复平面，因此条件(3.6)中的 α_{j0} 是必要的.

注 2　当柔性臂的弹性变形很小时，由文[1,6]及(2.4)知

$$\frac{B_j\varphi_{je}h}{A_jl}=\frac{h}{lEI}\frac{\varphi_{je}(m_tl\varphi_{je}+\rho a\int_0^l x_1\varphi_j\mathrm{d}x_1)}{\int_0^l\varphi_j''^2\mathrm{d}x_1}<<1. \tag{3.11}$$

因此可设 $\beta<1$，从而满足(3.6)中的条件 $\beta\neq1$.

注 3　比较(3.10)两端多项式关于 λ 及 λ^{2r+2} 项的系数可知 $p_j,\bar{p}_j(j=0,1,\cdots,r)$ 满足

$$
\begin{cases}
\bar{p}_0=\sum_{j=1}^{r}\dfrac{B_{j0}\bar{p}_jh}{A_{j0}}+\dfrac{\Lambda_0}{A_0}\left[-\dfrac{1}{\lambda_{r+1}}-\sum_{n=0}^{r}\left(\dfrac{1}{\lambda_n}+\dfrac{1}{\lambda_n'}\right)\right],\\
p_0=\sum_{j=1}^{r}B_{j0}p_j-\left[\lambda_{r+1}+\sum_{j=0}^{r}(\lambda_j+\lambda'_j)\right].
\end{cases} \tag{3.12}
$$

定理 1 圆满解决了文[1]等提出的在重力的作用下柔性机械手臂滑动模控制器设计中的滑动模极点配置问题，并得到了显解. 利用(3.7)及 Matlab 等软件很易确定出切换函数中的 $2r+3$ 个系数，因此采用滑动模控制方法具有一定的优点，易于设计及实现.

4　滑动模的鲁棒性

上面给出了无参数扰动下滑动模极点配置问题的显解. 现在讨论在存在参数不确定因素时滑动模的鲁棒性问题.

引理 2[11]　设实系数多项式 $F(\lambda)=\Phi(\lambda^2)+\lambda\Psi(\lambda^2)$，$\Phi(u)$ 与 $\Psi(u)$ 为 n 次实系数多项式且最高次幂系数同为正或负，则 $F(\lambda)$ 的根均具有负实部当且仅当 $\Phi(u)$ 的根 $u_j(j=1,\cdots,n)$ 与 $\Psi(u)$ 的根 $u'_j(j=1,\cdots,n)$ 满足

$$u'_n<u_n<u_{n-1}'<u_{n-1}<\cdots<u'_1<u_1<0. \tag{4.1}$$

引理 3[8]　若矩阵 $A+BK$ 的特征值是单重的且位于 $C_\sigma=\{\lambda\in C\,|\,\mathrm{Re}\lambda<-\sigma\}(\sigma>0)$ 内，则当

$$a=\sup\|\Delta A\|<\sigma \tag{4.2}$$

时，不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu, \\ u = Kx \end{cases}$$

的解渐近稳定.其中 $\|\cdot\|$ 为欧氏范数.

显然由(3.2)知,不确定扰动 ΔA_j 必满足

$$A_j = A_{j0} + \Delta A_{j0} \neq h \quad 或 \quad \Delta A_j \neq -\alpha_{j0}, \quad j = 1, \cdots, r. \tag{4.3}$$

否则 $\lambda = \pm\sqrt{A_j}i$ 是(3.2)的特征根,从而滑动模系统(2.6)不可能渐近稳定.因此以下设有某个非负整数 $J \in \{0, 1, \cdots, r\}$ 使得

$$A_{J0} < h < A_{J+10}, \quad A_J < h < A_{J+1}, \tag{4.4}$$

其中约定:若 $J = 0$,则 $A_J = A_{J0} = 0$;若 $J = r$,则 A_{J+1}, A_{J+10} 为大于 h 的正数.

定理 2 若所给 $2r + 3$ 个极点 $\lambda_j, \lambda'_j, (j = 0, 1, \cdots, r), \lambda_{r+1}$ 满足

i) $(-1)^j \alpha_{j0} \mathrm{Re}\Lambda_j > 0, \quad (-1)^j \alpha_{j0} \mathrm{Im}\Lambda_j > 0,$

ii) $(-1)^J \alpha_{j0} \mathrm{Re}\Lambda_h > 0, \quad (-1)^J \mathrm{Im}\Lambda_h > 0,$

iii) $\lambda_j, \lambda'_j (j = 0, 1, \cdots, r), \lambda_{r+1} \in C_\sigma = \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \mathrm{Re}\lambda < -\sigma\}$ 且 λ_{r+1} 为实数.

而(2.6)式中的有关不确定参数除满足(2.5)及(4.4)外,还满足下列条件:

iv) $\beta = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{B_{j0}\varphi_{je0}h}{A_{j0}l} \in (0, 1),$

v) $\sup|\Delta A_j| < \sigma, \quad |\Delta B_j| \leqslant \mu |B_{j0}|, \quad j = 1, \cdots, r,$

vi) $\sup\left|\dfrac{\varphi_{je}B_j}{A_j} - \dfrac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}}\right| \leqslant \eta \dfrac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}}, \quad j = 1, \cdots, r.$

其中 Λ_j, Λ_h 由(3.8)定义;$\sigma > 0$ 为适当大的正数;μ 与 η 满足

$$0 \leqslant \mu < \min(1, \eta), \quad 0 < \eta < (1 - \beta)/\beta. \tag{4.5}$$

则滑动模系统(2.6)是渐近稳定的.

证 引入下列记号

$$\Phi(u) = (p_0 u + k)f(u) - \sum_{j=1}^{r} B_j (p_j u + k\varphi_{je}/l)(u + h)g_j(u),$$

$$\Psi(u) = (u + \bar{p}_0)f(u) - \sum_{j=1}^{r} B_{j0}\bar{p}_j (u + h)g_j(u),$$

$$\Phi_1(u) = (p_0 u + k)f(u) - \sum_{j=1}^{r} B_{j0}(p_j u + k\varphi_{je0}/l)(u + h)g_j(u),$$

$$\Psi_1(u) = (u + \bar{p}_0)f(u) - \sum_{j=1}^{r} B_{j0}\bar{p}_j (u + h)g_j(u),$$

$$\hat{\Phi}(u) = \frac{\Phi(u)}{(u + h)f(u)}, \quad \hat{\Psi}(u) = \frac{\Psi(u)}{(u + h)f(u)},$$

$$\hat{\Phi}_1(u) = \frac{\Phi_1(u)}{(u + h)f(u)}, \quad \hat{\Psi}_1(u) = \frac{\Psi_1(u)}{(u + h)f(u)}.$$

则由(3.7)及所给条件知

$$\bar{p}_0 - h = \frac{\mathrm{Im}\Lambda_h}{\sqrt{h}\, f_0(-h)} = \frac{(-1)^J \mathrm{Im}\Lambda_h}{\sqrt{h}\, |f_0(-h)|} > 0,$$

$$k - p_0 h = \frac{\mathrm{Re}\Lambda_h}{f_0(-h)} = \frac{(-1)^J \mathrm{Re}\Lambda_h}{h|f_0(-h)|} > 0,$$

$$-B_j\bar{p}_j = (1+\mu_j)\frac{(-1)^j \alpha_{j0}\mathrm{Im}\Lambda_j}{\sqrt{A_{j0}\alpha_{j0}^2}|g_{j0}(-A_{j0})|} \geqslant (1-\mu)\frac{(-1)^j \alpha_{j0}\mathrm{Im}\Lambda_j}{\sqrt{A_{j0}\alpha_{j0}^2}|g_{j0}(-A_{j0})|} > 0,$$

$$\begin{aligned} B_j p_j - k\frac{\varphi_{je}B_j}{A_j l} &= B_{j0}p_j - k\frac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}l} + (B_j - B_{j0})p_j + k\left(\frac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}l} - \frac{\varphi_{je}B_j}{A_j l}\right) \\ &\geqslant (1-\mu)B_{j0}p_j - (1-\eta)k\frac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}l} \\ &= (1-\mu)\left|\frac{\mathrm{Re}\Lambda_j}{A_{j0}\alpha_{j0}g_{j0}(-A_{j0})}\right| + (\eta-\mu)k\frac{\varphi_{je0}B_{j0}}{A_{j0}l} \\ &\geqslant (1-\mu)\left|\frac{\mathrm{Re}\Lambda_j}{A_{j0}\alpha_{j0}g_{j0}(-A_{j0})}\right| > 0. \end{aligned}$$

注意到$(-1)^{j-1}g_j(-A_j) > 0, \alpha_j\alpha_{j0} > 0, (\alpha_j = A_j - h)$由上述关系式即得

$$\begin{aligned} (-1)^j\Psi(-A_j) &= -B_j\bar{p}_j(h-A_j)g_j(-A_j)(-1)^j \\ &= (-B_j\bar{p}_j)\alpha_j|g_j(-A_j)|\begin{cases} <0, & j\leqslant J, \\ >0, & j>J, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^j\Phi(-A_j) &= (-1)^j A_j\left(p_j B_j - k\frac{\varphi_{je}B_j}{A_j l}\right)(h-A_j)g_j(-A_j) \\ &= A_j\left(p_j B_j - k\frac{\varphi_{je}B_j}{A_j l}\right)\alpha_j|g_j(-A_j)|\begin{cases} <0, & j\leqslant J, \\ >0, & j>J, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(-1)^J\Psi(-h) = (\bar{p}_0 - h)f(-h)(-1)^J > 0,$$

$$(-1)^J\Phi(-h) = (k - p_0 h)f(-h)(-1)^J > 0,$$

$$\Phi(0) = k\prod_{j=1}^{r}A_j\left[1 - \sum_{j=1}^{r}\frac{B_j\varphi_{je}h}{A_j l}\right] \geqslant k\prod_{j=1}^{r}A_j[1-(1+\eta)\beta] > 1,$$

$$\Psi(0) = \prod_{j=1}^{r}A_j\left[\bar{p}_0 - \sum_{j=1}^{r}\frac{B_j\bar{p}_j h}{A_j}\right] > 0,$$

于是由介值定理即知$\Phi(u)$的根u_j与$\Psi(u)$的根u_j'满足

当$J\geqslant 1$时，

$$\begin{cases} u_{r+1} < -A_r < u_r < \cdots < -A_{J+1} < u_{J+1} < -h < u_J < -A_J < \cdots < -A_2 < u_1 < -A_1 < 0, \\ u_{r+1}' < -A_r < u_r' < \cdots < -A_{J+1} < u_{J+1}' < -h < u_J' < -A_J < \cdots < -A_2 < u_1 < -A_1 < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

当$J=0$

$$\begin{cases} -A_r < u_r < -A_{r-1} < \cdots < -A_2 < u_2 < -A_1 < u_1 < -h < u_0 < 0, \\ -A_r < u_r' < -A_{r-1} < \cdots < -A_2 < u_2' < -A_1 < u_1' < -h < u_0' < 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

同理可知$\Phi_1(u)$的根$\hat{u}_j$及$\Psi_1(u)$的根$\hat{u}_j'$满足

当$J\geqslant 1$时

$$\begin{cases} \hat{u}_{r+1} < -A_r < \hat{u}_r < \cdots < -A_{J+1} < \hat{u}_{J+1} < -h < \hat{u}_J < -A_J < \cdots < -A_2 < \hat{u}_1 < -A_1 < 0, \\ \hat{u}_{r+1}' < -A_r < \hat{u}_r' < \cdots < -A_{J+1} < \hat{u}_{J+1}' < -h < \hat{u}_J' < -A_J < \cdots < -A_2 < \hat{u}_1' < -A_1 < 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

当 $J=0$，

$$\begin{cases} -A_r<\hat{u}_r<-A_{r-1}<\cdots<-A_2<\hat{u}_2<-A_1<u_1<-h<\hat{u}_0<0, \\ -A_r<\hat{u}'_r<-A_{r-1}<\cdots<-A_2<\hat{u}'_2<-A_1<\hat{u}'_1<-h<\hat{u}'_0<0. \end{cases} \tag{4.9}$$

且由引理2及引理3知 $\hat{u}'_j<\hat{u}_j$. 下证同样有 $u'_j<u_j$，则由(3.2)及引理2知，$G(\lambda)=\Phi(\lambda^2)+\lambda\Psi(\lambda^2)$ 的所有根均具负实部，因此定理2结论成立.

由于当 $u\neq -h,\ -A_j$ 时有

$$\hat{\Phi}'(u)=\frac{p_0h-k}{(u+h)^2}-\sum_{j=1}^{r}\frac{B_j(p_jA_j-k\varphi_{je}/l)}{(u+A_j)^2},$$

$$\hat{\Phi}_1'(u)=\frac{p_0h-k}{(u+h)^2}-\sum_{j=1}^{r}\frac{B_{jo}(p_jA_j-k\varphi_{jeo})}{(u+A_j)^2},$$

$$\hat{\Psi}'(u)=\frac{h-\bar{p}_0}{(u+h)^2}+\sum_{j=1}^{r}\frac{B_j\bar{p}_j}{(u+A_j)^2},$$

$$\hat{\Psi}_1'(u)=\frac{h-\bar{p}_0}{(u+h)^2}+\sum_{j=1}^{r}\frac{B_{jo}\bar{p}_j}{(u+A_j)^2}.$$

利用上式及有关系数性质可得

$$\begin{cases} (1+\mu)\hat{\Psi}_1'(u)\leqslant\hat{\Psi}_1'(u)\leqslant(1-\mu)\hat{\Psi}_1'(u)<0, \\ (1+\hat{\mu})\hat{\Phi}_1'(u)\leqslant\hat{\Phi}_1'(u)\leqslant(1-\mu)\hat{\Phi}_1'(u)<0. \end{cases} \tag{4.10}$$

其中 $\hat{\mu}=\max(\mu,\eta)$. 利用(4.6)～(4.10)及文[9]定理2类似的证明即知 $u'_j<u_j$. 证毕.

定理2中条件i)～iii)表明了所给极点配置应满足的关系；条件iv)对微小变形的柔性臂是成立的；条件v)及vi)给出了不确定参数扰动的允许范围. 从(4.5)知，当 β 比较小也即变形很小时，允许的不确定参数变化范围比较大，反之则较小，这从物理直观意义上讲是显然的.

利用文[9]引理3类似的证明，我们得到下列满足定理2中条件i)～iii)的极点配置准则.

定理3 定理2中的条件i)～iii)满足，如果所给的 $2r+3$ 个互异极点 $\lambda_j,\lambda'_j(j=0,1,\cdots,r),\lambda_{r+1}$ 按下列准则选取

i) $\mathrm{Re}\lambda_j<0,\quad \mathrm{Re}\lambda'_j<0,\quad j=0,1,\cdots,r.$

ii) $-(\lambda_1+\lambda'_1),\cdots,-(\lambda_J+\lambda'_J),-(\lambda_0+\lambda'_0),-(\lambda_{J+1}+\lambda'_{J+1}),\cdots,-(\lambda_r+\lambda'_r)$

单调增加，$-\lambda_{r+1}\geqslant\max(\sqrt{h},\sqrt{A_{r0}})\mathrm{ctg}\varepsilon$.

iii) $\dfrac{\lambda_1\lambda'_1}{-(\lambda_1+\lambda'_1)},\cdots,\dfrac{\lambda_J\lambda'_J}{-(\lambda_J+\lambda'_J)},\dfrac{\lambda_0\lambda'_0}{-(\lambda_0+\lambda'_0)},\dfrac{\lambda_{J+1}\lambda'_{J+1}}{-(\lambda_{J+1}+\lambda'_{J+1})},\cdots,\dfrac{\lambda_r\lambda'_r}{-(\lambda_r+\lambda'_r)}$

单调增加且

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi-2\varepsilon}{2(r-j+2)}<\frac{\lambda_j\lambda_j'-A_{j0}}{-(\lambda_j+\lambda'_j)\sqrt{A_{j0}}}<\mathrm{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-j+2)},\quad j\leqslant J\text{ 时},$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi-2\varepsilon}{2(r-j+1)}<\frac{\lambda_j\lambda'_j-A_{j0}}{-(\lambda_j+\lambda'_j)\sqrt{A_{j0}}}<\mathrm{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-j+1)},\quad j>J\text{ 时},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi-2\varepsilon}{2(r-j+1)}<\frac{\lambda_0\lambda'_0-h}{-(\lambda_0+\lambda'_0)\sqrt{h}}<\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-j+1)},$$

$$0<-(\lambda_j+\lambda'_j)<\frac{A_{j+10}-A_{j0}}{\sqrt{A_{j0}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-j+2)}+\sqrt{A_{j+10}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2j(r-j+1)}},$$

$$j=J+1,\cdots,r-1,$$

$$0<-(\lambda_j+\lambda'_j)<\frac{A_{j+10}-A_{j0}}{\sqrt{A_{j0}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-j+1)}+\sqrt{A_{j+10}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(j+1)(r-j)}},$$

$$j=J+1,\cdots,r-1,$$

$$0<-(\lambda_j+\lambda'_j)<\frac{h-A_{J0}}{\sqrt{A_{J0}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-J+2)}+\sqrt{h}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(J+1)(r-J)}},$$

$$0<-(\lambda_0+\lambda'_0)<\frac{A_{J+10}-h}{\sqrt{h}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(r-J+1)}+\sqrt{A_{J+10}}\operatorname{ctg}\frac{\delta(\pi-2\varepsilon)}{2(J+1)(r-J)}}.$$

其中 $\delta\in(0,1),\varepsilon\in(0,\pi/2)$.

于是我们可根据定理 3 中的条件 i)～iii)选取适当的极点配置，再由(3.7)确定出切换函数 s 中的 $2r+3$ 个未知系数，然后由定理 2 判别在存在未知参数扰动下滑动模的稳定性.

5　结束语

由于重力作用下柔性机械手臂的动力学行为比较复杂，因而其控制问题变得十分困难. 本文采用滑动模控制方法，得到了滑动模极点配置问题的显解，并探讨了其鲁棒性，从而从理论上证实了已有工作中提出的有关猜想. 由于篇幅关系，有关不确定参数变化范围的估计及数值仿真与实验等结果将另文给出.

参 考 文 献

[1] Yeung, K. S. and Chen, Y. P.. Sliding Mode Controller Design of a Single-Link Flexible Manipulator Under Gravity. Int. J. Control, 1990, 52: 101－107

[2] Chen, Y. P. and Yeung, K. S.. Sliding Mode Control of Multi-Link Flexible Manipulators. Int. J. Control, 1991, 54: 257－278

[3] Yeung, K. S. and Chen, Y. P.. Regulation of a One-Link Flexible Robot Arm Using Sliding Mode Technique. Int. J. Control, 1989, 49: 1965－1978

[4] Korolov, V. V. and Chen, Y. H.. Controller Design Robust to Frequency Vibration in a One-Link Flexible Robot Arm. J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1989, 111: 9－14

[5] Li, K. C., Leung, T. P. and Hu, Y. M., Robust Controller Design of a Single-Link Flexible Robot Arm with Uncertain Payload. submitted to ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1994

[6] Kanoh, H. and Lee, H. G.. Vibration Control of One-Link Flexible Arm. Proceedings of 24-th Conference on Control and Decision, Ft. Lauderdale, FL, U. S. A, 1985, 1172－1177

[7] Looke, T. D., Farooq, M. and Bayoumi, M. M.. The Response of a One-Link Flexible Arm to Variablé Structure Control Using Sliding Surfaces. Proceedings of 5-th IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems. Perpignan, France, 1989, 984－989

[8] 胡跃明，周其节. 分布参数变结构控制系统. 北京：国防工业出版社，1996

[9] 胡跃明，周其节，徐建闽. 柔性臂滑动模控制器设计中的鲁棒极点配置. 1995 中国控制会议论文集，中国科学技术出

版社,1995,1290—1296

[10] Hu,Y. M. ,Lee,C. K. ,Zhou,Q. J. and Xu,J. M. Explicit Solution of Pole Assignment in the Sliding Mode Controller Design of Flexible Manipulators. Submitted to Int. J. Control. ,1995

[11] 甘特马赫尔著,柯召译. 矩阵论. 北京:高等教育出版社,1956

Robust design of Sliding Mode Controller for Flexible Manipulators Under Gravity

HU Yueming, XU Jianmin and ZHOU Qijie

(Department of Automation,South China Unversity of Technology · Guangzhou,510641,PRC)

LEE Chi-Kuen

(Department of Electronic Engineering,Hong Kong Polytechnic Unversity · Hong Kong)

Abstract: This paper addresses the robust regulation problem of flexible manipulators moving on vertical plane. The sliding equations are first obtained using the existing dynamic model and switching function, the explicit solution of pole assignment for the sliding mode design is then presented; finally, robust pole placement approach is given to guarantee asymptotic stability of sliding motion under unmatched parameter variations. The robust pole assignment problem proposed by previous authors is therefore solved perfectly.

Key words: flexible manipulators; sliding mode; pole assignment; robustness

本文作者简介

胡跃明 见本刊1996年第1期第10页.

徐建闽 1960年. 教授. 1982年于江西工学院电机系获学士学位,1986年和1994年在华南理工大学分别获硕士和博士学位. 现任华南理工大学交通学院副院长,交通工程系系主任. 研究兴趣为非线性控制、鲁棒控制、自适应控制、神经网络控制、机器人及其控制、交通监控及CIMS.

周其节 见本刊1996年第1期第19页.

李志权 分别于1977年与1984年在University of London与UCNW;University of Wales获电子工程学士与博士学位. 1977年在Hirst Research Center,GEC工作. 1981年到1986年在香港"ASM装配自动化"任管理工程师,为IC制造工业开发马达控制器. 1986年来在香港理工学院(近更名为香港理工大学)电子工程系任职. 现为该系高级讲师. 研究兴趣为数字信息处理,数字马达控制器及马达控制系统的仿真技术等.