一种非线性系统自适应控制及其收敛性分析*

秦 滨 韩志刚

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨,150080)

摘要：本文对基于输入输出随机梯度的非线性系统的控制律进行了收敛性分析.给出了SISO控制系统收敛的充分条件,并根据该条件给出一种非线性系统自适应控制器的设计方法.

关键词：非线性系统；自适应控制；随机逼近；收敛性

1 问题的提出

用随机逼近方法解决非线性系统的控制问题,可以避免由于系统模型未知、建模困难或含有未建模动态所带来的困难[3,4].但是随机逼近算法中的关键是 K_k 的选取问题和多次才能逼近真值的问题.对于动态系统来说,逐次逼近似乎不太可能.但是,如果系统的输入输出随机梯度存在的话,那么梯度法可以一次完成最优逼近.即我们有如下的结论(详细的讨论可参阅文[1,2]).

考虑如下的SISO离散非线性系统

$$y(k)=f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-2}^{k-m},u(k-1),k].$$

其中 $f[\cdot]$ 是 $Y_{k-1}^{k-n},U_{k-2}^{k-m},u(k-1)$ 的非线性函数,并且

$$Y_{k-1}^{k-n}=\{y(k-1),y(k-2),\cdots,y(k-n)\},$$

$$U_{k-2}^{k-m}=\{u(k-2),u(k-3),\cdots,u(k-m)\}.$$

引入平方误差准则函数

$$J(u(k-1))=E\{\frac{1}{2}[y_0(k)-y(k,u(k-1)]^2\}.$$

应用Robbins Monro随机逼近算法可得

$$u(k-1)=u(k-2)+\gamma(k-1)K_{k-1}[y_0(k)-y(k,u(k-1))]. \tag{2}$$

如果 $y(k,u(k-1))$ 关于 $u(k-1)$ 的梯度存在,则可得到如下的一步最佳控制律,

$$u(k-1)=u(k-2)+\frac{\lambda_k}{\|\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]\|^2}\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$$
$$\cdot\{y_0(k)-f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u(k-2),k]\},\quad \text{a.s.} \tag{3}$$

$$\nabla_{u(k-2)}Y[(k-2)]=\frac{\partial}{\partial u}f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-2}^{k-m},u,k]|_{u=u(k-2)}. \tag{4}$$

其中 $y_0(k)$ 是控制目标,λ_k 是适当的控制参数.在一般情况下 $\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 是未知时变的.

显然这样的控制律是易实现的.然而 $\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 的存在性是这一问题的关键.下面的引理将回答这一问题.

* 本文得到国家和黑龙江省自然科学基金资助项目.
本文于1994年7月14日收到.1995年10月31日收到修改稿.

引理 1 对于非线性系统(1)，如果 $\nabla_{u(k-3)}y[k-1,u(k-3)]$ 存在且 $y(k-1)\neq y_0(k-1)$，那么 $\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 存在.

证 由(3)式，如果 $\nabla_{u(k-3)}y[k-1,u(k-3)]$ 存在且 $y(k-1)\neq y_0(k-1)$，则显然可以计算出 $u(k-2)$ 且有

$$u(k-2)\neq u(k-3).$$

这样，如果系统(1)是可镇定的，将 $u(k-2)$ 代入(1)可得 $y(k-1)$，显然有

$$y(k-1)\neq y(k-2).$$

因此可以得到下面的结论，即下式

$$\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]=\frac{\partial}{\partial u}f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-2}^{k-m},u,k]\Big|_{u=u(k-2)}$$

存在. 证毕.

由此可见由(3)式给出的控制律，只要在初始时刻的输入输出梯度存在且此时的实际输出不等于目标输出的话，将是可实现的.

2 非线性系统控制律的收敛性分析

引理 2 在(3)式给出的控制律中，λ_k 满足

$$\lambda_k=\frac{\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]}{\nabla_{u'}y[k,u']}. \tag{5}$$

其中

$$\nabla_{u'}y[k,u']=\frac{\partial y(k,u)}{\partial u}\Big|^{u=u'}=\frac{y(k,u(k-1))-y(k,u(k-2))}{u(k-1)-u(k-2)}$$

$$u'\in[u(k-2),u(k-1)],$$

$$\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]=\frac{\partial y(k,u(k-2))}{\partial u}\Big|_{u=u(k-2)}.$$

证 由引理 1 及微分中值定理知存在 u' 使得

$$\nabla_{u'}y[k,u']=\frac{y(k,u(k-1))-y(k,u(k-2))}{u(k-1)-u(k-2)}, \tag{6}$$

$$u(k-1)=u(k-2)+\frac{1}{\nabla_{u'}y[k,u']}\{y(k)-y(k,u(k-2))\}. \tag{7}$$

由(2),(7)式得 $\gamma(k-1)\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]=\dfrac{1}{\nabla_{u'}y[k,u']}$.

不失一般性，令 $\nabla_{u'}[k,\mu']=\delta_k\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]^r$.

则直接可得引理 2 的结论. 证毕.

定理 1 控制律(3)中 $\lambda_k=1$ 的充分条件为

$$\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]=\nabla_{u(k-1)}y[k,u(k-1)].$$

证明从略[3,4].

由定理 1 知在通常情况下 λ_k 是时变的，确定 λ_k 是非常困难的，因此，我们应该考虑当 λ_k 取常值时系统的跟踪性能，下面的定理给出当 $\lambda_k=1$ 时控制律保证系统收敛的充分条件.

定理 2 如果控制律(3)中 $\lambda_k=1$，那么系统收敛的充分条件为 $\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 与 $\nabla_{u(k-1)}y[k,u(k-1)]$ 的符号相同且

$$|\nabla_{u'}y[k,u']| < 2|\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]|. \tag{9}$$

证 由引理2知 $\lambda_k = \dfrac{\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]}{\nabla_{u'}y[k,u']}$.

将(5)代入(3)式得

$$u(k-1) = u(k-2) + \frac{1}{\nabla_{u'}y[k,u']}\{y_0(k) - f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u(k-2),k]\}. \tag{10}$$

如果将 $\lambda_k=1$ 代入(3)式则有

$$u'(k-1) = u(k-2) + \frac{1}{\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]}\{y_0(k) - f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u(k-2),k]\}. \tag{11}$$

由微分中值定理知

$$y(k) = y(k-1) + \nabla_{u'}y[k,u'](u(k-1) - u(k-2)). \tag{12}$$

将(11)式代入(12)式，即用 $u'(k-1)$ 代替 $u(k-1)$ 得

$$y(k) = y(k-1) + \frac{\nabla_{u'}y[k,u']}{\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]}\{y_0(k) - f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u(k-2),k]\}. \tag{13}$$

用 $y_0(k)$ 减去上式两边得

$$y_0(k) - y(k) = [y_0(k) - y(k-1)]\{1 - \frac{\nabla_{u'}y[k,u']}{\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]}\}.$$

如果 $\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 与 $\nabla_{u(k-1)}y[k,u(k-1)]$ 的符号相同且

$$|\nabla_{u'}y[k,u']| < 2|\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]|.$$

则有 $\dfrac{|y_0(k) - y(k)|}{|y_0(k) - y(k-1)|} < 1.$

因此闭环系统收敛. 证毕.

定理3 对于控制律

$$u(k-1) = u(k-2) + \frac{1}{\|\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]\|^2}\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)] \cdot \{y_0(k) - f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u(k-2),k]\}$$

及闭环系统

$$y(k) = f[Y_{k-1}^{k-n},U_{k-3}^{k-m},u'(k-1),k]. \tag{14}$$

一定存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|y_0(k) - y(k-1)| < \varepsilon$ (15)

时，闭环系统(14)的输出收敛于 $y_0(k)$. a.s.

证 由引理1知，如果 $y_0(k)$ 与 $y(k)$ 充分接近时，一定存在一个 $\varepsilon<0$，使得当

$$|y_0(k) - y(k-1)| < \varepsilon$$

时，$\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]$ 与 $\nabla_{u(k-1)}y[k,u(k-1)]$ 的符号相同并且满足

$$|\nabla_{u'}y[k,u']| < 2|\nabla_{u(k-2)}y[k,u(k-2)]|.$$

即满足定理2中的条件.

3 基于收敛条件的自适应控制器

由引理1及定理3知，只要设计控制器时保证系统输出的初始输出值在 y_0 的某邻域

内,那么就可以使闭环系统输出收敛于 y_0. 但显然这是不够理想的. 为了得到大范围或全局的结果(满足引理 1 的条件的结果),下面给出一种改进的方法. 即用 $y_0'(k)$ 去逼近 y_0. 逼近公式如下

$$y_0'(k) = y_0'(k) + \beta(y_0(k) - y_0'(k-1)). \tag{16}$$

其中 $\beta \leqslant 1$ 是给定的增益,显然通过调整 β 可以满足收敛条件,即使得 $|y_0(k) - y(k-1)| < \varepsilon$. 因此,相应的自适应控制器为:

$$y_0'(k) = y_0'(k-1) + \beta(y_0 - y_0'(k-1)), \tag{17}$$

$$u(k-1) = u(k-2) + \frac{\lambda_k}{\|\varphi(k)\|^2}\varphi(k)[y_0'(k) - y(k-1)], \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\varphi(k-1) = \varphi(k-2) + M(k-1)\{&y(k-1) - y(k-2) \\ &- [u(k-2) - u(k-3)]^{\mathrm{T}}\varphi(k-2)\},\end{aligned} \tag{19}$$

$$M(k-1) = \frac{P(k-2)[u(k-2) - u(k-3)]}{\alpha_{k-1} + [u(k-2) - u(k-3)]^{\mathrm{T}}P(k-2)[u(k-2) - u(k-3)]}, \tag{20}$$

$$P(k-1) = \frac{1}{\alpha_{k-1}}\{I - M(k-1)[u(k-2) - u(k-3)]^{\mathrm{T}}\}P(k-2). \tag{21}$$

其中 $\lambda_k = 1,\quad 0 < \beta \leqslant 1,\quad 0 < \alpha_{k-1} \leqslant 1$.

该自适应控制器同样适用于 MISO 非线性系统[4].

4 仿真研究

下面的仿真给出了用本文的自适应控制器和用文[1,2]的自适应控制器控制 SISO 和 MISO 非线性系统跟踪方波的对比结果.

例 1 考虑如下的 SISO 非线性系统

$$y(k) = 0.2y(k-1) + u^2(k-1) + 3\sin(u(k-1)u(k-2)) + e.$$

其中 $u(0) = 0.5, y(0) = 0, e$ 为方差为 0.2 的零均值白噪声. 仿真结果见图 1 和图 2.

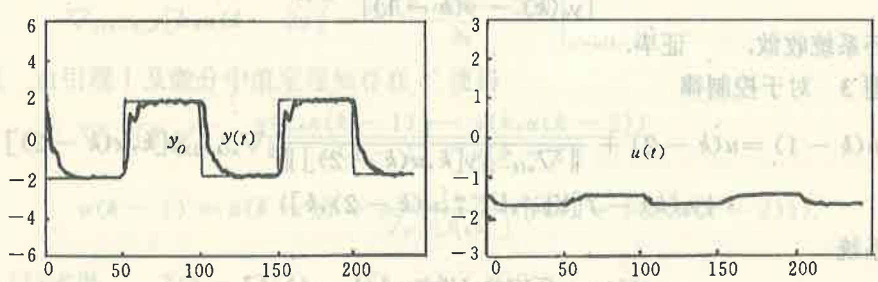

图 1 本文自适应控制器仿真结果

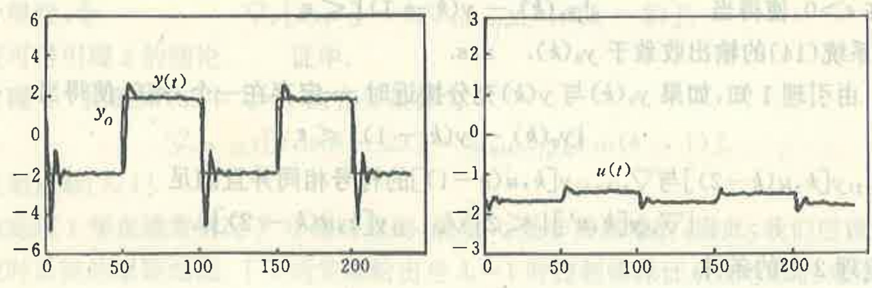

图 2 文[1,2]自适应控制器仿真结果

例 2 考虑如下的 MISO 非线性系统

$$y(k) = 0.8y(k-1) + 3\sin(u_1^2(k-1)) + 5\cos(u_2^2(k-1)) - 2u_1(k-1) + e.$$

其中 $u_1(0)=0.3, u_2=0.2, y(0)=0$, e 为方差为 0.3 的零均值白噪声.

仿真结果见图 3 和图 4.

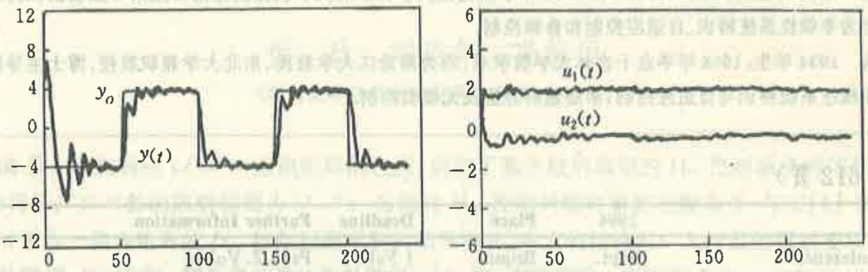

图 3　本文自适应控制器仿真结果

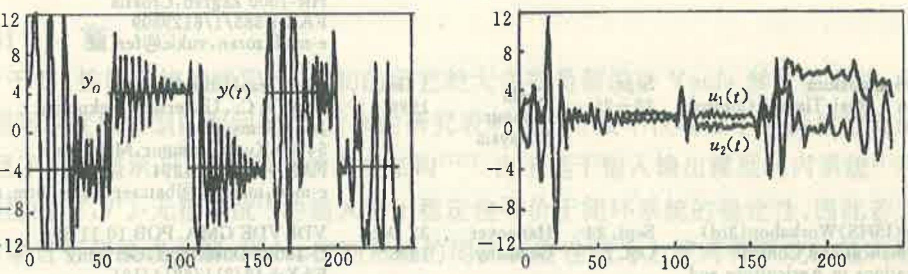

图 4　文[1,2]自适应控制器仿真结果

由以上的仿真可以看出,文中给出的自适应控制器的稳定性与收敛性优于文[1,2]中的自适应控制器,避免了超调或发散现象.

参　考　文　献

[1] 韩志刚. 非线性系统自适应控制系统设计的一种方法. 控制与决策,1990,15(6):39—45

[2] 韩志刚. 同参数估计对偶的自适应控制算法. 控制理论与应用,1992,19(4):374—479

[3] 秦滨等. 模型未知系统的无模型自适应控制. 1995 中国控制与决策学术年会论文集,成都,1995,218—222

[4] 秦滨等. 非线性系统的直接自适应控制. 1995 中国控制与决策学术年会论文集,成都,1995,254—259

An Adaptive Control and Its Convergence Analysis of Nonlinear Systems

QIN Bin　and　HAN Zhigang

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

Abstract: The convergence of the control law for nonlinear systems basing on stochastic gradient is analysed. The sufficiency for the control law to gurantee the output convergence of the closed loop system is proved. According to the sufficiency, a new adaptive controller for nonlinear systems is presented.

Key words: nonlinear systems; adaptive control; stochastic approximation; convergence

本文作者简介

秦 滨 1966年生.分别于1991年和1996年于黑龙江大学和东北大学获控制理论与应用专业硕士和博士学位.主要研究方向为非线性系统辨识、自适应控制和鲁棒控制.

韩志刚 1934年生.1958年毕业于吉林大学数学系.现为黑龙江大学教授、东北大学兼职教授,博士生导师.主要研究方向为非线性系统辨识与自适应控制,多层递阶方法及无模型控制.

(上接第612页)

Title	1996	Place	Deadline	Further Information
IFAC Conference Manoeuvring and Control of Marine Crafe-MCMC'97	Sept. 10—12	Brijuni Croatia	1 Feb. 1997	Prof. Z. Vukic University of Zagreb. Unska 3 Fac. of El. Engg. and Computing HR-1000 Zagreb, Croatia FAX+385/1/6129809 e-mail: zoran, vukic@fer. hr
IFAC Symposium AI in Real-Time Control-AIRTC 97	Sept. 23—25	Kuala Lumpur Malaysia	1 Dec. 1996	Dr. Marzuki Bin Khalid B. A. T. C.. Unversitiy Teknologi · Jalan Semarak 54100 Kuala Lumpur, Malaysia FAX+603/2911294 e-mail: marzuki@batcserv. batc. utm. my
IFAC/(ISHS)Workshop(3rd) Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture	Sept. 28-Oct. 2	Hannover Germany	31 Dec. 1996	VDI-VDE GMA. POB 10 11 39 D-40002 Düsseldorf, Germany FAX+49/211/6214/161
IFAC Conference System Structure and Control	Oct. 23—25	Bucharest Romania	1 June 1997	Prof. Dumitru Popescu Splaiul Independentei 313 Bucharest 6, Romania e-mail: dpopescu@indinf. pub. ro
EPS/IFAC Intl. Conference Accelerator and Large Experimental Physics Control Systems ICALEPCS 97	Nov. 4—7	Beijing China, P. R.		Prof. Jijiu Zhao Institute of High Energy Physics. POB 918 (10) Beijing, 100039, China, P. R. FAX +86/10/82 3374. e-maill: icalepcsj@bepc 2. ihep. ac. cn

Title	1998	Place	Deadline	Further Information
IFAC Symposium Intelligent Autonoumous Vehicles-IAV	March 25—27	Madrid Spain		Prof. Carlos Balaguer Universidad Carlos III de Madrid Depto de Ingenieria, c/Butarque 15 E-28911 Leganes. Madrid, Spain FAX+34 1 642 9430 e-mailLbalaguer@ing. uc3m. es
IFAC Symposium Information Control Problems in Manufacturing-INCOM'98	June 24—26	Nancy France	8 Sept. 1997	INCOM'98/CRAN-GGP Facultédes Sciences Université Henri Paincaré Nancy 1, BP 239 F-54506 Vandoeuvre less Nancy FAX +33/83 91 21 26 e-mail: incom98@cran. u-nancy. fr
IFAC Symposium Low Cost Automation LCA 98	Sept. 8—10	Shenyang China, P. R.	1 Oct. 1997	Prof. Chen Zhen-Yu LCA 98 Secretariat, POB 919 Beijing 100081, Chian, P. R. FAX+86/10/381 6990