第 13 卷第 5 期
1996 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 5
Oct., 1996

基于散射模型的 H_∞ 控制系统的稳定性*

忻 欣 刘延年 冯纯伯

(东南大学自动化研究所·南京,210018)

摘 要:本文利用 (J,J')- 无损矩阵的性质,研究了基于散射模型的 H_∞ 控制系统的闭环稳定性,获得了广义对象的散射模型为 (J,J')- 无损的 H_∞ 控制问题可解的充要条件. 与文[1]中关于广义对象为一类内矩阵的 H_∞ 控制问题求解的结果相比,本文的结论对广义对象的限制要弱.

关键词: H_∞ 控制; 闭环稳定性; 散射模型; (J,J')-无损矩阵; 内矩阵

1 引 言

对于 H_∞ 控制系统的稳定性,最初的研究绝大多数是借助于 Youla 参数化方法,将标准 H_∞ 控制问题变成模型匹配问题[2],后来的研究表明这一方法不仅增加了分析和推导的复杂性,而且不利于揭示 H_∞ 控制系统的本质结构[1,3]. 由于基于输入输出模型的内系统[1]和基于散射模型的 (J,J')-无损系统[3]的输入输出稳定性等价于闭环系统的稳定性,因此若通过对广义对象进行变换或分解,将 H_∞ 控制系统的闭环稳定性归为上述两种系统的输入输出稳定性,就可避免引入 Youla 参数化这一过程.

本文利用 (J,J')-无损矩阵的性质和有界实引理,研究基于散射模型的 H_∞ 控制系统的稳定性,并讨论与文[1]中关于广义对象为一类内矩阵的 H_∞ 控制问题求解的结果的关系,与文[3]不同之处在于对控制器结构事先未作假设,而讨论一般性的控制器. 在本文中,记 RL_∞ 为所有在虚轴上无极点的 $m\times r$ 正则有理函数阵, RH_∞ 是 RL_∞ 中的稳定子集, BH_∞ 是 RH_∞ 中 H_∞ 范数小于 1 的子集, $J_{mr}:=\operatorname{diag}\{I_m,-I_r\}$.

2 (J,J')-无损矩阵

首先给出 (J,J')- 无损矩阵的定义[4].

定义 1 若 $\Theta(s)\in RL^\infty_{(m+r)\times(p+q)}$ 满足

$$\Theta^\sim(s)J_{mr}\Theta(s)=J_{pq},\quad \forall s, \tag{1}$$

其中, $m\geqslant p, q\leqslant r$, 则称 $\Theta(s)$ 为 (J_{mr},J_{pq})- 幺阵. 若 $\Theta(s)$ 还满足

$$\Theta^*(s)J_{mr}\Theta(s)\leqslant J_{pq},\quad \operatorname{Re}[s]\geqslant 0, \tag{2}$$

则称 $\Theta(s)$ 为 (J_{mr},J_{pq})- 无损矩阵.

相对于 H_∞ 控制问题,在本文中只考虑 $J'=J_{pr}J_{mq}$. 下面给出 (J,J')- 无损矩阵的状态空间描述:

引理 1[3] 设 $\Theta(s)$ 的状态空间最小实现为

$$\Theta(s)=\left[\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right]. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 3 月 31 日收到. 1995 年 12 月 26 日收到修改稿.

$\Theta(s)$ 为(J,J')- 幺阵当且仅当 $D^{T}JD=J'$ 成立且存在 P 满足

$$PA+A^{T}P+C^{T}JC=0, \tag{4}$$

$$D^{T}JC+B^{T}P=0. \tag{5}$$

$\Theta(s)$ 为(J,J')- 无损矩阵当且仅当 $P>0$.

注 1 若式(3)仅为 $\Theta(s)$ 的可镇定和可检测实现,则 $\Theta(s)$ 为(J,J')- 无损,当且仅当 $P\geqslant 0$.

引理 2[1] 考虑如下系统

$$\begin{bmatrix} z \\ r \end{bmatrix}=P(s)\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, \quad v=Q(s)r. \tag{6}$$

设 $P(s)\in \mathrm{RH}_\infty$, $P^{\sim}(s)P(s)=I$, $P_{21}^{-1}(s)\in \mathrm{RH}_\infty$. 则下面两结论等价:

i) 系统是闭环稳定,且 z 到 w 的传函 $T_{zw}(s)$ 满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<1$.

ii) $Q(s)\in \mathrm{BH}_\infty$.

由式(6)知,若用散射模型来描述 $P(s)$ 可得

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{12}-P_{11}P_{21}^{-1}P_{22} & P_{11}P_{21}^{-1} \\ -P_{11}^{-1}P_{22} & P_{21}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}=\Theta\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}, \tag{7}$$

由于 $P(s)$ 为内矩阵,故 $\Theta(s)$ 为(J,J')- 无损矩阵.

3 基于散射模型的 H_∞ 控制系统的稳定性

设图 1 所示的广义对象的散射模型及 $Q(s)$ 的最小实现为:

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc} A & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$Q(s)=\left[\begin{array}{c:c} A_Q & B_Q \\ \hdashline C_Q & D_Q \end{array}\right]. \tag{9}$$

直接计算,我们可得 $T_{zw}(s)$ 的状态空间实现:

$$T_{zw}(s)=\left[\begin{array}{c:c} A_H & B_H \\ \hdashline C_H & D_H \end{array}\right], \tag{10}$$

$$A_H=\begin{bmatrix} A & B_1C_Q \\ 0 & A_Q \end{bmatrix}+B_H[C_2 \quad D_{21}C_Q], \quad B_H=-\begin{bmatrix} B_1D_Q+B_2 \\ B_Q \end{bmatrix}(D_{21}D_Q+D_{22})^{-1},$$

$$C_H=D_H[C_2 \quad D_{21}]-[C_1 \quad D_{11}C_Q], \quad D_H=(D_{11}D_Q+D_{12})(D_{21}D_Q+D_{22})^{-1}.$$

下面从频域和时域两方面给出有关 H_∞ 控制系统闭环稳定的 2 个等价定义.

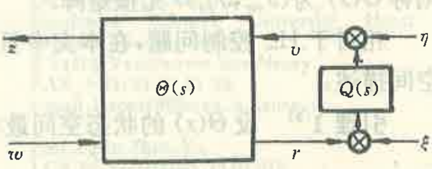

图 1 基于散射模型的 H_∞ 控制

定义 2 图 1 所示的 H_∞ 控制系统闭环稳定是指 $[w^{T} \quad \xi^{T} \quad \eta^{T}]^{T}$ 到 $[z^{T} \quad v^{T} \quad r^{T}]^{T}$ 的传递函数均稳定.

定义 3 图 1 所示的 H_∞ 控制系统闭环稳定是指 A_H 稳定.

现在我们给出本文的主要结论如下:

定理 1 设 $\Theta(s)$ 是(J,J')- 幺阵,则以下两结论等价:

i) 存在 $Q(s)$ 使得闭环系统稳定，且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < 1$;

ii) $\Theta(s)$ 为 (J,J')- 无损矩阵，$Q(s) \in BH_\infty$.

证　i)→ii)，首先证明 $\|Q(s)\|_\infty < 1$，接着证明 $Q(s) \in RH_\infty$，最后证明，$\Theta(s)$ 是 (J,J')- 无损的. 根据图 1，设干扰 $\xi = 0, \eta = 0$，则

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}, \quad v = Qr. \tag{11}$$

若 $\|Q(s)\|_\infty \geq 1$，则存在 $s = jw_0$ 使得 $\|v\|_2 = \|Qr\|_2 \geq \|r\|_2$，这样可由 $w = (\Theta_{21}Q + \Theta_{22})r$ 来构造 w，因为 $\Theta(s)$ 是 (J,J')- 幺阵，所以，$\|z\|_2^2 - \|w\|_2^2 = \|v\|_2^2 - \|r\|_2^2 \geq 0$，故 $\|z\|_2^2 \geq \|w\|_2^2$，这与 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 相矛盾. 因此，$\|Q(s)\|_\infty < 1$.

设 $w = 0, \eta = 0$，而 $\xi \neq 0$，则由 $v = Q(r + \xi)$ 和式(11) 得，$r = -\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}v$，故 $v = (I + Q\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})^{-1}Q\xi$ 是稳定的. 设 $Q = M^{-1}N$ 为 Q 的互质分解，则 $(I + Q\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})^{-1}Q = (M + N\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})^{-1}N$ 亦为互质分解，所以 $(M + N\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})^{-1}$ 是稳定的，其 Nyquist 曲线围绕零点次数为 0. 根据 $\det[M + \varepsilon QN\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}] = \det M \det(I + \varepsilon Q\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})$，以及 $\|Q\|_\infty < 1$ 和 $\|\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}\|_\infty < 1$ 知，当 ε 从 0 变到 1 时，$\det(I + \varepsilon Q\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}) > 0$ 不变号，所以 $(M + \varepsilon N\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})^{-1}$ 稳定. 当 $\varepsilon = 0$ 亦如此，即 $M^{-1}(s) \in RH_\infty$，所以 $Q(s)$ 稳定.

最后证明 $\Theta(s)$ 是 (J,J')- 无损的，其证明类似于文[3]. 因为 $\Theta(s)$ 是 (J,J')- 幺阵，由引理 1 知存在 P 满足(4) 和(5). 对 $Q(s)$ 由有界实引理[5] 知存在 $X_Q > 0$，且

$$X_QA_Q + A_Q^TX_Q + (C_Q^TD_Q + X_QB_Q)R_Q^{-1}(D_Q^TC_Q + B_Q^TX_Q) + C_Q^TC_Q = 0,$$

这里 $R_Q := I - D_Q^TD_Q > 0$. 由 $D^TJD = J'$ 得，$(D_{21}D_Q + D_{22})^T(I - D_H^TD_H)(D_{21}D_Q + D_{22}) = I - D_Q^TD_Q$. 直接计算知

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & X_Q \end{bmatrix} A_H + A_H^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & X_Q \end{bmatrix} + (C_H^TD_H + \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & X_Q \end{bmatrix} B_H)$$

$$\cdot (I - D_H^TD_H)^{-1}(D_H^TC_H + B_H^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & X_Q \end{bmatrix}) + C_H^TC_H = 0. \tag{12}$$

由有界实引理[5]得 $\|T_{zw}\|_\infty \in RH_\infty$，当且仅当 $P \geq 0$. 所以 Θ 是 (J,J')- 无损的.

ii)→i) 因为 $\Theta(s)$ 是 (J,J')- 无损的，故式(12) 中的 P 满路 $P > 0$. 由式 (12) 知 A_H 稳定且 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$.　　证毕.

文[3] 直接假设 $Q(s) \in BH_\infty$，而定理 1 的 i) 中我们事先未对 $Q(s)$ 作任何假设. 另外，在定理 1 的证明中，我们没有用到 $P_{21}^{-1}(s) \in RH_\infty$ 这一限制，根据式(7)，这一限制就是 $\Theta_{22}(s) = P_{21}^{-1}(s) \in RH_\infty$. 与内矩阵不同，一般的 (J,J')- 无损矩阵不一定是稳定的，例如

$$\Theta(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s-2} \end{bmatrix}$$

是 (J_{11}, J_{11})- 无损的，$\Theta(s)$ 不稳定. 而由此例知，$\Theta_{22}(s)$ 不稳定. 因此，引理 2 只是定理 1 的一个特例. 综上所述，定理 1 是关于 H_∞ 控制系统的稳定性的最一般的结论.

4　结束语

本文利用 (J,J')- 无损矩阵的性质和有界实引理，研究了基于散射模型的 H_∞ 控制系统

的闭环稳定性,并获得了广义对象的散射模型为(J,J')-无损的H_∞控制问题可解的充要条件.与文[1]和[3]中关于H_∞控制系统稳定性的结论相比,本文的结论更为一般.

参考文献

[1] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A.. State-Space Solutions to Standard H^2 and H_∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34:167—172

[2] Francis, B. A.. Course in H_∞ Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Science. 88, New York, Springer-Verlag, 1987

[3] Kimura, H.. Chain-Scattering Representation, J-Lossless Factorization and H_∞ Control. Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, 1994, 6:

[4] Xin, X. and Kimura, H.. Singular (J,J')-Losseless Factorization for Strictly Proper Functions. International Journal of Control, 1994, 59:1383—1400

[5] Anderson, B. D. O. and Vongpanitler. S.. Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach. Prentice-Hall, 1973

Stability of H_∞ Control Systems Based on Chain-Scattering Representation

XIN Xin, LIU Yannian and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast Univsersity • Nanjing, 210018, PRC)

Abstract: The closed-loop stability of H_∞ control systems based on chain-scattering representation is studied by using the property of (J,J')-lossless matrix. A necessary and sufficient condition for the H_∞ control systems where the chain-scattering representation of generalized plant is a (J,J')-lossless matrix is obtained. In comparison with the result of [1] about the stability of H_∞ control problem for an inner system, the constraint on the generalized plant is weak.

Key words: H_∞ control; closed-loop stability; chain-scattering representation; (J,J')-lossless matrix; inner matrix

本文作者简介

忻 欣 见本刊1996年第1期第75页.

刘延年 见本刊1996年第1期第75页.

冯纯伯 见本刊1996年第1期第17页.