第 13 卷第 5 期
1996 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 13, No. 5
Oct., 1996

状态反馈同时镇定的非线性方程数值解*

赵明旺

(武汉冶金科技大学自动化系·武汉,430081)

摘要：本文运用多项式分解,将状态反馈同时镇定问题化成相容非线性方程组的求解,提出了一种求解相容非线性方程的拟牛顿下山数值算法,并应用该方法求解同时镇定问题.

关键词：同时镇定；状态反馈；非线性方程组；数值算法

1 问题描述

状态反馈同时镇定指的是:是否存在一个状态反馈同时镇定有限个状态方程.该问题是鲁棒控制和容错控制中的重要问题,有较强的实际背景[1,2,3].近年,同时镇定的数值解法较受重视,其思路是利用稳定性结果,将同时镇定问题转化成一个非线性约束优化问题并求解之来设计同时镇定反馈律[2,3],但文[2,3]的方法中,所转化的约束方程较多且多为不等式约束,相应的优化变量也多,而且其指标函数难于得到简洁的优化问题表述和算法,致使求解困难.

本文根据多项式分解和相容非线性方程组数值解,讨论状态反馈同时镇定.

考虑对 r 个 n 维的能控 SISO 线性定常连续系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad i = \overline{1,r} \tag{1}$$

是否存在如下同一状态反馈律 $u_i = -Kx_i$ 使得闭环系统同时稳定.其中 x_i, u_i, A_i 和 B_i 分别是第 i 个系统的状态、输入、系统矩阵和输入向量;$K = [k_1 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_n]$是反馈向量.

由线性系统理论知,一定存在线性变换阵 P_i,使得能控系统(1)变换成如下能控标准型

$$\dot{\tilde{x}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{i,n} & -a_{i,n-1} & \cdots & -a_{i,1} \end{bmatrix} \tilde{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i, \quad i = \overline{1,r}. \tag{2}$$

其中 $a_{i,j}$ 为系统的开环特征多项式系数.此时在变换阵 P_i 下,状态反馈律为 $u_i = -\tilde{K}_i \tilde{x}_i$,其中 $\tilde{K}_i = KP_i = [\tilde{k}_{i,1} \quad \tilde{k}_{i,2} \quad \cdots \quad \tilde{k}_{i,n}]$.相应的闭环特征多项式为

$$f_{c,i}(s) = s^n + (a_{i,1} + \tilde{k}_{i,n})s^{n-1} + \cdots + (a_{i,n} + \tilde{k}_{i,1}), \quad i = \overline{1,r}. \tag{3}$$

由代数多项式分解可知,闭环特征多项式 $f_{c,i}(s)$是稳定的当且仅当其可以表示为

$$f_{c,i}(s) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{\bar{n}} (s^2 + \alpha_{i,j}^2 s + \beta_{i,j}^2), & n \text{ 为偶数}, \\ \prod\limits_{j=1}^{\bar{n}} (s^2 + \alpha_{i,j}^2 s + \beta_{i,j}^2)(s + \alpha_{i,\bar{n}}^2), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

---

* 湖北省自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 7 月 28 日收到.1996 年 1 月 8 日收到修改稿.

$$= s^n + g_{i,1}s^{n-1} + \cdots + g_{i,n}, \quad i = \overline{1,r}. \tag{4}$$

其中 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 为非零实数；$\underline{n}$ 和 $\overline{n}$ 分别为 $n/2$ 和 $(n+1)/2$ 的整数部分；$g_{i,k}$ 为 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的恒正函数. 显然，n 为偶数时，$\underline{n} = \overline{n}$；$n$ 为奇数时，$\underline{n} + 1 = \overline{n}$. $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的个数分别为 $\overline{n}$ 和 $\underline{n}$，之和为 n.

比较式(3)和(4)可知，状态反馈同时镇定有解的充要条件为下述非线性方程组有解

$$F_i(K,C_i,D_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} + \tilde{k}_{i,n} - g_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} + \tilde{k}_{i,1} - g_{i,n} \end{bmatrix} = 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{5}$$

其中　$C_i = [\alpha_{i,1} \quad \alpha_{i,2} \quad \cdots \quad \alpha_{i,\overline{n}}]^\tau, \quad D_i = [\beta_{i,1} \quad \beta_{i,2} \quad \cdots \quad \beta_{i,\underline{n}}]^\tau.$

由于同时镇定是否有解等价于方程组(5)是否有解，则求解同时镇定反馈律也转化为求解方程组(5). 若同时镇定问题有解，则该方程组为相容的. 由于方程组(5)的方程总数为 rn，而变量 k_i，$\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的个数为 $n+rn$，即方程数小于变量数，因此其解非唯一. 本文的同时镇定方法的关键是有效地求解方程数小于变量数的相容非线性方程组(5).

2　相容非线性方程组的拟牛顿法求解

牛顿法是一种求解变量数与方程数一致的，具有平方收敛性的非线性方程组的数值解法[4]. 下面将牛顿法的思想推广至求解如下变量数 q 大于方程数 p 的相容非线性方程组

$$f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_p(x)]^\tau = 0. \tag{6}$$

将式(6)所示的函数 $f(x)$ 在点 (x_k) 的邻域展开至泰勒一阶展开式，即有

$$f(x) \approx f(x_k) + \frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}[x - x_k]. \tag{7}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}$ 为梯度方向阵. 类似于牛顿法，在第 $k+1$ 次迭代求解时，令新迭代值 x_{k+1}，使 $f(x_{k+1}) = 0$. 因此，由式(7) 可知，x_{k+1} 满足

$$\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}[x_{k+1} - x_k] = -f(x_k). \tag{8}$$

由于方程(8)的方程数 p 小于变量数 q，因此 x_{k+1} 的解不唯一. 由代数方程理论和广义逆矩阵的定义[5]，方程(8) 的通解的

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}\right]^- f(x_k) - \left(I - \left[\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}\right]^- \frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}\right)z, \quad \forall z \in \mathrm{R}^q. \tag{9}$$

其中矩阵 $\left[\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}\right]^-$ 表示矩阵 $\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}$ 的广义逆. 若在迭代中迭代值 x_k 保证总能使矩阵 $\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}$ 行满秩，则 $\frac{\mathrm{d}f(x_k)}{\mathrm{d}x}$ 的广义逆可以用下式来计算

$$\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^+ = \frac{\mathrm{d}f^\tau(x)}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f^\tau(x)}{\mathrm{d}x}\right]^{-1}. \tag{10}$$

综合上述思想，可得如下相容非线性方程组(6)的拟牛顿下山法的计算步骤：

步骤 1　选择初始迭代值 x_0.

步骤 2　按如下公式计算迭代值 $\overline{x}_1$.

$$\overline{x}_1 = x_0 - \left[\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\right]^{-1} f(x_0). \tag{11}$$

步骤 3　若 $\bar{x}_1$ 使 $\|f(\bar{x}_1)\| \geqslant \|f(x_0)\|$，则采用 $\bar{x}_1$ 的如下修正值作为新的迭代值

$$x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda)\left\{\bar{x}_1 - \left(I - \left[\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\right]^{-}\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\right)z\right\}, 0 \leqslant \lambda < 1, \quad \forall z \in \mathrm{R}^q. \tag{12}$$

其中 λ 为下山因子. 上述修正式的作用为保证迭代中使函数值 $f(x_1)$ 单调下降，向量 z 可随机取值以尽量避免该函数值落入局部极值而导致迭代过程无解.

步骤 4　若迭代值满足结束迭代条件 $\delta < \varepsilon_1$ 或 $\|f(x_1)\| < \varepsilon_2$，则终止迭代，$x_1$ 即为相容非线性方程组(6)的解，否则转步骤 5. 此处 ε_1 和 ε_2 为允许误差，而

$$\delta = \begin{cases} \|x_1 - x_0\|, & \text{当 } \|x_1\| < C \text{ 时}, \\ \dfrac{\|x_1 - x_0\|}{\|x_1\|}, & \text{当 } \|x_1\| \geqslant C \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 C 是取绝对误差或相对误差的控制数，一般可取 $C = 1$.

步骤 5　若迭代未达到规定次数，则以 x_1 代替 x_0，返回步骤 2 继续迭代. 若达到规定次数而未收敛，方法失败. 失败的原因可能是初始迭代值选取不当，或者方程组(6)无解，即为不相容的. 根据具体情况分析，若是初始值选取不当，则返回步骤 1，重新选取初始值，继续迭代.

计算机数值计算表明，上述相容非线性方程组数值解法的收敛性非常好. 限于本文作者所见，该相容非线性方程组数值解法未见有报道.

3　同时镇定问题的数值求解

由于同时镇定有解时，方程组(5)是相容的. 因此根据上节的拟牛顿下山数值算法，可方便、有效地求得同时镇定的解. 在利用该数值解法时，式(7)中的梯度方向阵为

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \left[\begin{array}{c:cc:ccc} \dfrac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}K} & \dfrac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}C_1} & \dfrac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}D_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \dfrac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}K} & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}C_r} & \dfrac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}D_r} \end{array}\right], \tag{13}$$

其中　$f(x) = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_r]^\tau$,　$x = [K^\tau \quad A_1^\tau \quad B_1^\tau \quad A_2^\tau \quad B_2^\tau \quad \cdots \quad A_r^\tau \quad B_r^\tau]^\tau$,

$$\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}K} = \begin{bmatrix} p_{i,1,n} & p_{i,2,n} & \cdots & p_{i,n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i,1,1} & p_{i,2,1} & \cdots & p_{i,n,1} \end{bmatrix},$$

其中 $p_{i,j,k}$ 为能控标准形(2)的变换阵 P_i 的第 j 行第 k 列元素. 上述 $\dfrac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}K}$ 可由式(3)和(5)推得.

下面讨论导数 $\dfrac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}C_i}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}D_i}$ 的推导. 由式(4)可得

$$\frac{\mathrm{d}f_{c,i(S)}}{\mathrm{d}\alpha_{i,k}} = \begin{cases} 2\alpha_{i,\bar{n}} f_{c,i}(s)/(s + \alpha_{i,\bar{n}}^2), & n \text{ 为奇数}, k = \bar{n}, \\ 2\alpha_{i,k} s f_{c,i}(s)/(s^2 + \alpha_{i,k}^2 s + \beta_{i,k}^2), & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \alpha_{i,k}(h_{i,k,0}s^{n-1} + h_{i,k,1}s^{n-2} + \cdots + h_{i,k,n-1}), \quad i = \overline{1,r}; \quad k = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_{c,i(S)}}{\mathrm{d}\beta_{i,k}} = \beta_{i,k}(h_{i,k,0}s^{n-2} + h_{i,k,1}s^{n-3} + \cdots + h_{i,k,n-2}), \quad i = \overline{1,r}; \quad k = \overline{1,\underline{n}}. \tag{15}$$

其中 $h_{i,k,j}$ 可由多项式乘法计算. 由式(4)可知 $\alpha_{i,k}h_{i,k,j}$ 和 $\beta_{i,k}h_{i,k,j}$ 分别为 $g_{i,j+1}$ 对 $\alpha_{i,k}$ 和 $\beta_{i,k}$ 的导数. 因此，基于 $h_{i,k,j}$ 的计算，有如下导数式

$$\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}C_i}=\begin{bmatrix}-\alpha_{i,1}h_{i,1,0} & \cdots & -\alpha_{i,\bar{n}}h_{i,\bar{n},0}\\ -\alpha_{i,1}h_{i,1,1} & \cdots & -\alpha_{i,\bar{n}}h_{i,\bar{n},1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_{i,1}h_{i,1,n-1} & \cdots & -\alpha_{i,\bar{n}}h_{i,\bar{n},n-1}\end{bmatrix}_{n\times\bar{n}},\quad \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}D_i}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ -\beta_{i,1}h_{i,1,0} & \cdots & -\beta_{i,\underline{n}}h_{i,\underline{n},0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -\beta_{i,1}h_{i,1,n-2} & \cdots & -\beta_{i,\underline{n}}h_{i,\underline{n},n-2}\end{bmatrix}_{n\times\underline{n}}.$$

由于稳定多项式分解式(4)中的 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 都要求为非零，若在迭代中使 $\alpha_{i,j}(j=1,2,\cdots,\bar{n})$ 和 $\beta_{i,j}(j=1,2,\cdots,\underline{n})$ 尽量互异，则矩阵 $\left[\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}C_i}\quad\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}D_i}\right]$ 必为满秩. 所以，式(13)定义的梯度方向阵 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 必为行满秩，因此广义逆矩阵 $\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^-$ 可以用 $\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^+$ 来表示.

基于上述梯度方向阵的定义和相容非线性组数值解法，可得如下同时镇定的解法.

步骤 1　选择 K, C_i 和 D_i 的初始迭代值. 该初始值应使 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 都为非零 $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$ 行满秩.

步骤 2　由式(14)计算 $h_{i,j,k}$，进而构成矩阵 $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$，并由公式(11)计算迭代值 $\bar{x}_1$.

步骤 3　若 $\bar{x}_1$ 使 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 中某一变量的迭代值为零，或使矩阵 $\frac{\mathrm{d}f(\bar{x}_1)}{\mathrm{d}x}$ 行不满秩，或使 $\|f(\bar{x}_1)\|\geqslant\|f(x_0)\|$，则采用修正式(12)计算新迭代值 x_1.

步骤 4　若 x_1 满足结束条件，则终止迭代，同时镇定问题解即为 x_1，否则转步骤 5.

步骤 5　若迭代未达到规定次数，则 x_1 代替 x_0，返回步骤 2 继续迭代. 否则，若是初始值选取不当，则返回步骤 1，重新选取初始值继续迭代.

4 算例和结束语

例 1　考虑如下三个 3 维系统同时镇定问题

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u;$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0.5\end{bmatrix}u;$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0.75\\0\\0\end{bmatrix}u.$$

利用本文的算法，例 1 的计算结果如表 1 所示. 由表 1 可知，闭环特征多项式都是稳定的.

本文的状态反馈同时镇定的非线性方程数值解法求解的只是一个可行解，关于该解的性质，以及求解具有较好特性的解是本文方法的进一步发展需讨论的问题.

表 1　数值计算结果

初始迭代值	$\{-10,-10,-10,1,2,3,\cdots\}$	$\{20,20,20,3,2,1,\cdots\}$
K	$[13.729\quad 16.185\quad 7.402]$	$[30.257\quad 42.798\quad 19.516]$
闭环多项式	$s^3+3.402s^2+4.381s+3.946$ $s^3+4.701s^2+7.093s+7.865$ $s^3+9.267s^2+13.139s+6.552$	$s^3+16.516s^2+6.766s+5.975$ $s^3+10.758s^2+20.399s+16.129$ $s^3+21.693s^2+33.099s+15.637$

参 考 文 献

[1] Barmish, B. R., et al.. Extreme Ponit Results for Robust Stabalization of Interval plants with First order Compensators. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37:707－714

[2] Paskota, M., et al.. Optimal Simultaneous Stabilization of Linear Single-Input Systems via Linear State Feedback Control. Int. J. of Control, 1994, 60:483－498

[3] Howitt, G. D.. and Luus, R.. Simultaneous Stabilization of Linear Single-Input Systems by Linear State Feedback Control. Int. J. of Control, 1991, 54:1015－1030

[4] 李庆扬等. 数值分析. 武汉:华中工学院出版社,1982

[5] 陈大新. 矩阵理论. 上海:上海交通大学出版社,1991

Nonlinear-Equations Numerical Solution to Simultaneous Stabilization via State Feedback

ZHAO Mingwang

(Department of Automation, Wuhan Yejin University of Science & Technology • Wuhan, 430081, PRC)

Abstract: Based on the polynomial fractionization, the simultaneous stabilization problem via state feedback is transformed into a solving problem of a set of consistent nonlinear equations in this paper. Then a quasi-Newton decent numeric algorithm for solving the consistent nonlinear equations is presented and is applied to the simultaneous stabilization problem.

Key words: simultaneous stabilization; state feedback; nonlinear equations; numeric algorithm

本文作者简介

赵明旺　1964 年生. 1990 年毕业于浙江大学工业控制研究所,获博士学位. 现为武汉冶金科技大学自动化系教授、系副主任. 主要研究方向为系统辨识和自适应控制、鲁棒控制和智能控制.