

系统结构能控性检验的有向图方法*

李 慷 席裕庚

(上海交通大学自动化所·上海, 200030)

摘要: 本文通过引入一种新的有向图——“类仙人掌”, 给出了系统结构能控新的充要条件, 同时, 给出了检验系统结构能控的有效方法.

关键词: 结构能控; 有向图

1 引 言

众所周知, 对于一个复杂系统(如复杂的工业过程), 在进行系统分析与控制系统设计时, 往往首先要研究系统整体和结构方面的信息, 如系统操作流程, 过程单元及装置之间的联结关系, 进而通过对系统进一步的分析, 得到系统中变量之间的因果关系, 这些都通称系统最基本的结构信息. 在获得这些结构信息的基础上, 研究系统的结构能控与结构能观, 这是进行系统分析与控制结构综合的第一步.

系统结构能控、结构能观是 Lin, C. T. (1974 年) 引入的重要概念^[1]. 它们是系统在常值意义下能控能观的先决条件, 研究系统结构能控能观, 不但可以深化对系统本质的理解, 而且可进一步指出系统不能控不能观的原因及改进办法^[7~8~9].

考虑线性时不变系统

$$S: \dot{x} = Ax + Bu. \quad (1)$$

其中, A, B 分别为 $n \times n, n \times m$ 结构矩阵. 同时设 $G(A, B)$ 为其结构矩阵对应的有向图, 则关于结构可控, 下面三个命题等价^[4~6].

- 1) 系统 S 结构能控;
- 2) 系统状态输入可达(即 $[A, B]$ 不可约简), 且 $[A, B]$ 一般秩为 n ;
- 3) (A, B) 导出的有向图 $G(A, B)$ 可由一个多输入仙人掌(multi-input cacti) 扩张而成. 文^[4~6] 对以上三个等价命题之间的关系作了严格的证明.

以上三个命题中, 第三个比较直观. 但是如何获得一个仙人掌, 并不十分容易. 对一个系统, 凭已有的经验如不能获得一个仙人掌, 并不表明该有向图 $G(A, B)$ 不存在仙人掌, 从而推断系统结构不能控. 本文中, 我们将定义一种新的有向图, 并给出结构能控能观新的充分必要条件, 同时提出基于有向图操作的新的检验方法.

2 结构能控的一个充分必要条件

首先引入有关定义及基本图形^[1~2].

定义 2.1 茎(Stem): 一条茎是一段由多条有向弧连接而成的有向路径. 记为 T .

* 国家自然科学基金及中国博士后研究基金资助项目.

本文于 1995 年 2 月 14 日收到. 1996 年 1 月 9 日收到修改稿.

定义 2.2 循环(Cycle):起点与终点重合的一段有向路径. 记为 C_y .

定义 2.3 花蕾(Bud):末端节点上带有一个循环的一段弧. 本文一般记为 B

定义 2.4 仙人掌(cactus):一个单输入系统的仙人掌是一条茎及一些花蕾按一定关系组成的图形. 记为 C

$$C = T \cup B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_p. \tag{2}$$

其中, T 茎, $B_i, i = 1, 2, \dots, p$ 是花蕾. B_i 的起点同样也是图形 $T \cup B_1 \cdots \cup B_{i-1} \cup B_{i+1} \cdots \cup B_p$ 中一段弧线的起点(见图 1).

一个多输入系统的仙人掌是由一组无公共路径(包括弧及节点)的单输入仙人掌组成(见图 2).

定理 2.1^[1] 系统 (A, B) 结构能控的充要条件是有向图 $G(A, B)$ 可由一个仙人掌(记为 $C(A, B)$) 扩张成. 也即仙人掌 $C(A, B)$ 与 $G(A, B)$ 有相同的节点, 且有向弧是 $G(A, B)$ 的一个子集. 如图 3 所示.

上述定义和定理虽然给出了判断结构能控的准则, 但要在 $G(A, B)$ 中确定是否存在仙人掌 $C(A, B)$ 并非易事, 为了便于寻找和判断, 首先引入下列定义.

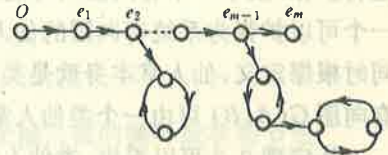


图 1 单输入仙人掌

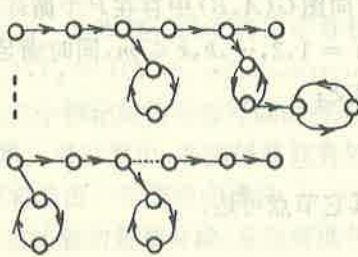


图 2 多输入仙人掌

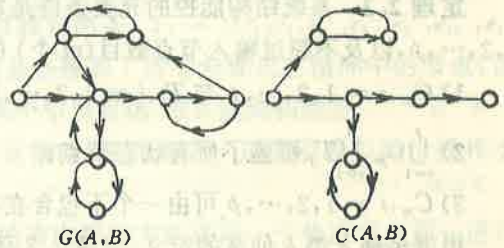


图 3 定理 2.1 的示意图

定义 2.5 类仙人掌(Cactus-like)一个单输入类仙人掌是由一条茎及一些花蕾按一定关系组合而成的有向图. 记为 $C_l(A, B)$.

$$C_l(A, B) = T \cup B_1 \cup B_2 \cdots B_p. \tag{3}$$

其中 T 是茎, $B_i, i = 1, 2, \dots, p$ 是花蕾. 这里花蕾的起点只要求属于图形 $T \cup B_1 \cdots \cup B_{i-1} \cup B_{i+1} \cdots \cup B_p$. 多输入类仙人掌是由多个公共路径的单输入类仙人掌组合而成的.

如图 4 所示的类仙人掌因包含有虚框部分, 故不是仙人掌.

定理 2.2 系统 (A, B) 结构能控的充要条件是有向图 $G(A, B)$ 可由一个类仙人掌 $C_l(A, B)$ 扩充而成.

证 由定义可知, 类仙人掌与仙人掌的区别仅仅在于类仙人掌的茎的末端还可能连接一组花蕾. 如图 5 所示.

这类仙人掌可记为 $C_l(A, B) = T \cup B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_p \cup B'_1 \cdots \cup B'_q$, 其中, T 为茎, $B_i, i = 1, 2, \dots, p$ 为花蕾, $B'_i, i = 1, 2, \dots, q$ 为附在茎 T 末端节点 e_m 上的花蕾或由 e_m 可达的花蕾. 对茎进行扩张, 将 B_1 上的节点全部包含在茎上, 同时删去相关的有向弧, 如图 5 中的弧

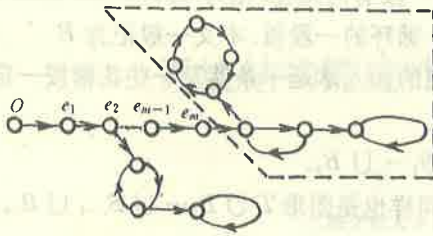


图4 类仙人掌

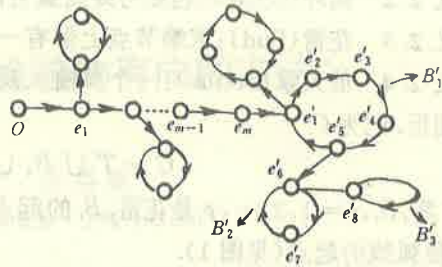


图5 定理 2.2 证明中的类仙人掌

(e'_5, e'_1). 如果所获得的新的茎的末端还带有花蕾,如图 e'_5 为花蕾 B'_2 的起点,则继续对茎进行扩张. 由于一个有向图只可能带有有限个花蕾,故茎的扩张总是有限的. 这样,就获得了一个可以扩张为系统有向图的仙人掌. 这说明,从一个类仙人掌中总可以找到一个仙人掌,同时根据定义,仙人掌本身就是类仙人掌的一种形式. 因此,系统结构能控的充要条件是它有向图 $G(A, B)$ 可由一个类仙人掌 $C_i(A, B)$ 扩充而成. 证毕.

从定理 2.2 可以看出,类仙人掌包含仙人掌,而从类仙人掌中又可找到一个仙人掌,因此,这两个概念具有等价性. 但引入类仙人掌后,为通过操作来检验系统的能控性提供了技术准备. 由此,可以引入下列定理.

定理 2.3 系统结构能控的充要条件是系统的有向图 $G(A, B)$ 中存在 P 个循环 $C_{y_i}, i = 1, 2, \dots, p$, 以及不超过输入节点数目 (m 个) 的茎 $T_i, i = 1, 2, \dots, k, k \leq m$, 同时满足:

- 1) $C_{y_i}, i = 1, 2, \dots, p$ 与 $T_i, i = 1, 2, \dots, k$ 互不相交;
- 2) $\bigcup_{i=1}^p C_{y_i} \cup \bigcup_{j=1}^k T_j$ 覆盖了所有状态节点;
- 3) $C_{y_i}, i = 1, 2, \dots, p$ 可由一个不包含在本身的其它节点可达;

根据多输入类仙人掌的定义,定理 2.3 显然.

3 基于有向图表达的结构能控性检验的新方法

根据定理 2.3, 可以通过适当操作, 确定系统是否存在一个类仙人掌, 从而推至系统是否结构能控. 下面, 我们给出系统结构能控的判别方法.

算法 3.1 系统结构可控的判别方法:

step 1 画出系统 (A, B) 的有向图 $G(A, B)$.

step 2 系统如果存在孤立的状态节点或循环, 或存在无输入弧的循环或状态节点, 则系统结构不能控.

step 3 从 $G(A, B)$ 中寻找所有无输出弧的循环以及只与一个其它节点相关联的循环, 将它们分别标记为固定循环.

step 4 从 $G(A, B)$ 中寻找所有未作标记的循环, 将它们标记为临时循环, 然后从这些临时循环中选择出一组, 连同已作固定标记的循环一起, 按照定理 2.3 进行结构可控性检验 (所挑选出的循环必须彼此不相交).

step 5 由于一个有向图中循环的个数有限, 各种临时循环的组合也有限, 因此, 结构能控性检验的次数也有限. 如果在任何一种循环的组合下, 都寻找不到一个类仙人掌, 则系统结构不能控. 反之则可控.

例 两输入系统 (A, B) 的有向图 $G(A, B)$ 如图 6 所示. 要求进行结构可控制性检验.

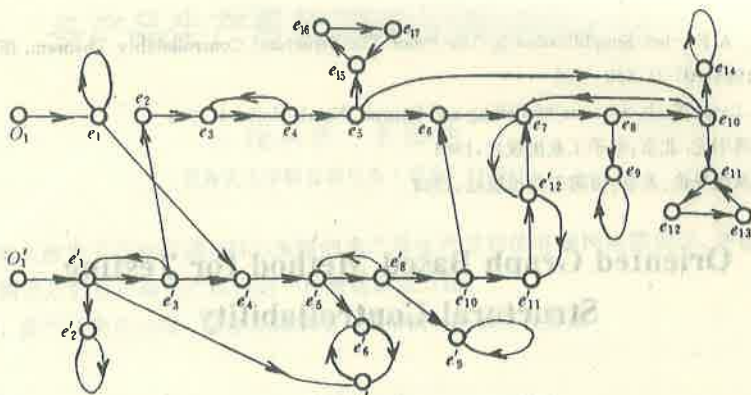


图 6 两输入系统的有向图

step 1 有向图中不存在孤立节点或循环,也不存在无输入弧的循环或状态节点.

step 2 循环 (e_2') , (e_6', e_7') , (e_9') , (e_9) , (e_{14}) , (e_{11}, e_{12}, e_{13}) , (e_{15}, e_{16}, e_{17}) 它们都互不相交, 标记为固定的循环.

step 3 再找出一个临时的循环 (e_{11}', e_{12}') , 也进行标记.

step 4 从未标记的有向图中寻找茎. 可以找到两条. $T_1 = (O_1, e_1, e_4', e_5', e_8', e_{10}', e_6, e_7, e_8, e_{10})$, $T_2 = (O_1', e_1', e_3', e_2, e_3, e_4, e_5)$. 这两条茎覆盖了所有未标记在循环中的节点, 而且, 以上八个标记的循环都可以由两条茎上的某个节点可达. 故系统结构能控.

注解 可以看出, 在如何寻找有效的无蒂花蕾时, 往往需要一定的经验以减少操作次数. 下面将给出一引进操作建议.

1) 在检验的最初阶段, 应当根据其相联的有向弧的方向将每一个状态节点逐一进行分析. 只与一个节点相连且方向指向本身的状态节点极有可能选择为一条茎中的节点.

2) 只与一条有向弧相连且方向向外的循环极有可能入选.

3) 包含节点较少的循环极有可能入选.

4 结 论

本文讨论了结构能控性检验的有向图方法. 通过引入一种全新的有向图——“类仙人掌”, 给出了系统结构能控新的充要条件, 并在此基础上, 给出了便于操作的检验系统结构能控的有效方法, 举例说明了结论的有效性. 该种有向图的优点还在于它能处理更为复杂的组合系统.

参 考 文 献

- [1] Lin, C. T. . Structural Controllability. IEEE. Trans. Automat. Contr. , 1974, AC-19: 201—208
- [2] Shields, R. W. and Pearson J. B. . Structural Controllability of Multi-Input System. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1976, AC-21: 202—212
- [3] Davison, E. J. . Connectivity and Structural Controllability of Composite System. Automatica. 1977, 12: 109—118
- [4] Mayeda, H. . On Structural Controllability Theorem. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1981, AC-26: 79—798

- [5] Yamada, T. . Comments on "On Structural Controllability Theorem". IEEE Trans. Automat. Contr. , 1984, AC-29: 1130-1131
- [6] Linnemann, A. . A Further Simplification in The Proof The Structural Controllability Theorem. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1986, AC-31: 638-639
- [7] Jamshidi, M. J. . Large-Scale Systems Modelling and Control. North-Holland, 1983
- [8] 王众托. 系统工程引论. 北京: 电子工业出版社, 1984
- [9] 席裕庚. 动态大系统导论. 北京: 国防工业出版社, 1988

Oriented Graph Based Method for Testing Structural Controllability

LI Kang and XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University · Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: In this paper, oriented graph based method for testing structural controllability is studied. Necessary and sufficient conditions are proposed by introducing new kinds of graphical concepts, an effective oriented graph based method for testing structural controllability is suggested correspondingly.

Key words: structural controllability; oriented graph

本文作者简介

李 慷 1968年生, 博士. 现在上海交通大学博士后流动站做研究工作, 研究兴趣为复杂工业过程的建模、控制及优化.

席裕庚 见本刊1996年第3期第304页.