第 14 卷第 1 期
1997 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 1
Feb., 1997

具有结构不确定性的线性系统的鲁棒稳定性分析

曹永岩　孙优贤

(浙江大学工业控制技术研究所·杭州, 310027)

摘要：本文基于一种非线性向量幂变换将结构不确定线性系统的鲁棒稳定性问题转化成相应参数矩阵的非奇异性问题,得到了保证系统鲁棒稳定的充分条件,以及保证系统稳定的参数允许界.本文考虑了摄动矩阵结构上的特点,使得系统的鲁棒稳定区域大大扩大,最后通过实例和已有结果进行了比较.

关键词：线性不确定系统；结构不确定性；鲁棒稳定性；幂变换

1 引　言

具有结构不确定性的线性系统的鲁棒稳定性分析一直是控制系统鲁棒研究中的一个热点问题,并且已取得了许多成果[2~10].其中大部分结论都是基于 Lyapunov 稳定性定理,得到保证摄动系统稳定的鲁棒界.但这实际上得到的是保证摄动系统二次稳定的鲁棒界,对于常实参数不确定性来说这些结论是非常保守的.文[7]基于 Kronecker 代数给出了系统鲁棒稳定的一种参数区域,并给出了鲁棒稳定性的一种新的分析方法,但该方法计算非常繁琐,不仅计算时的矩阵维数非常高(一个 3 阶系统的计算维数就达到 9 维),而且为了得到较大的界不得不进行试凑,另外该文的参数的取值范围也被约束到了对称的空间.本文基于文[1]中的一种非线性幂变换将结构不确定线性系统的鲁棒稳定性问题转化成相应参数矩阵的非奇异性问题,得到了系统鲁棒稳定的几种充分条件,而且当已知系统受到的是单参数摄动时,得到了系统鲁棒稳定的充分必要条件.最后通过实例表明了本文的结论比已有的结果优越得多.

符号说明：$\lambda_{\max}(\cdot)$,$\lambda_{\min}(\cdot)$分别表示矩阵·的最大和最小实特征值,$\sigma_{\max}(\cdot)$,$\sigma_{\min}(\cdot)$分别表示矩阵·的最大和最小奇异值.

2 预备知识

考虑如下具有结构不确定性的线性系统

$$\dot{x}(t) = A(k)x(t), \tag{2.1}$$

$$A(k) = A_0 + \Delta A = A_0 + \sum_{i=1}^{p} k_i A_i. \tag{2.2}$$

其中 A_0 是一 $n \times n$ 实稳定矩阵,ΔA 表示结构不确定性,k_i 表示不确定性参数,A_i 是给定的 $n \times n$ 实矩阵,表示不确定性的结构矩阵,p 为不确定参数个数.我们假定 $k = [k_1, \cdots, k_p] \in \Omega$,其中

$$\Omega = \{k \in \mathbb{R}^p: -\underline{k_i} < k_i < \overline{k_i}, i = 1, \cdots, p\}.$$

式中 $\underline{k_i}$,$\overline{k_i}$ 均为正常数.显然 $0 \in \Omega$,且 Ω 为一连通区域.

如果对于所有 ΔA,$A_0 + \Delta A$ 均为稳定的,我们就说系统(2.1)是鲁棒稳定的,对于含有结构不确定性的线性系统(2.1)的鲁棒稳定性分析,通常就是对于给定的参数变化域 Ω,$k \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$,确定系统是否稳定,或者就是确定保证系统(2.1)稳定的参数 k 的允许变化范围.

本文于 1995 年 4 月 12 日收到. 1995 年 10 月 16 日收到修改稿.

引入文[1]中的向量变换

$$x_l^{[q]} = a_l x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{q_n}, \quad l = 1,2,\cdots,m. \tag{2.3}$$

其中

$$m = \binom{n+q-1}{q}, \quad a_l = \sqrt{q!/q_1!q_2!\cdots q_n!}, \quad q_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = q. \tag{2.4}$$

应用此变换到线性方程　$\dot{x} = Ax$,

可以得到

$$\dot{x}^{[q]} = A_{[q]} x^{[q]}. \tag{2.5}$$

显然 $A_{[q]}$ 是 $m \times m$ 方阵. 而且有[1]

$$\lambda_l(A_{[q]}) = \lambda_{i_1}(A) + \lambda_{i_2}(A) + \cdots + \lambda_{i_q}(A), \quad l = 1,\cdots,m, \quad i_1,i_2,\cdots,i_q = 1,\cdots,n.$$

因此若 $\mathrm{Re}\lambda_i(A) < 0, i = 1,\cdots,n$, 则 $\mathrm{Re}\lambda_j(A_{[q]}) < 0, j = 1,\cdots,m$。对 $x^{[2]}$ 按(2.1)的轨迹求导可得

$$\dot{x}^{[2]}(t) = (A_{0[2]} + \sum_{i=1}^{p} k_i A_{i[2]}) x^{[2]}(t). \tag{2.6}$$

这里 $A_{0[2]}, A_{i[2]}$ 为 $m \times m$ 方阵, 因 A_0 稳定, 故 $A_{0[2]}$ 稳定.

引理 2.1　系统(2.1)鲁棒稳定当且仅当系统(2.6)鲁棒稳定.

根据上面的分析很容易证明本引理.

引理 2.2　系统(2.1)鲁棒稳定当且仅当

$$\det(A_{0[2]} + \sum_{i=1}^{p} k_i A_{i[2]}) \neq 0, \quad k \in \Omega. \tag{2.7}$$

证　如果(2.1)是鲁棒稳定的, 则必有 $\mathrm{Re}\lambda_i(A(k)_{[2]}) = \mathrm{Re}(\lambda_j(A(k)) + \lambda_k(A(k))) < 0, i = 1,\cdots,m, k; j = 1,\cdots,n$, 因此(2.7)式成立. 反过来, 假设(2.1)不是鲁棒稳定的, 则存在一 $\bar{k} \in \Omega$ 使得 $A(\bar{k})$ 不稳定, 因为 $A_0 = A(0)$ 稳定且 Ω 是连通的, 则一定存在一 $k^* \in \Omega$ 使得 $A(k^*)$ 至少有一纯虚特征值, 因此

$$\det(A(k^*)_{[2]}) = \det(A_{0[2]} + \sum_{i=1}^{p} k_i^* A_{i[2]}) = 0.$$

因而(2.7)成立则一定有(2.1)鲁棒稳定.

定理 2.1　系统(2.1)鲁棒稳定当且仅当

$$\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i) > -1, \quad k \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$F_i = A_{i[2]} A_{0[2]}^{-1}. \tag{2.9}$$

证　由假设 A_0 稳定有 $\det(A_{0[2]}) \neq 0$, 因而

$$\begin{aligned}\det(A_{0[2]} + \sum_{i=1}^{p} k_i A_{i[2]}) &= \det(A_{0[2]})\det(I + \sum_{i=1}^{p} k_i A_{i[2]} A_{0[2]}^{-1}), \quad k \in \Omega \\ &= \det(A_{0[2]})\det(I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i), \quad k \in \Omega.\end{aligned} \tag{2.10}$$

因此 $\det(A_{0[2]} + \sum_{i=1}^{p} k_i A_{i[2]}) \neq 0$, 当且仅当 $\det(I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i) \neq 0, k \in \Omega$.

由于 $\det(I) = 1 > 0$, 以及行列式关于参数 k 的连续性可知(2.7)式成立当且仅当

$$\det(I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i) > 0, \quad k \in \Omega. \tag{2.11}$$

我们知道，对于 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，　　$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$，

因此(2.7)成立当且仅当　　$\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i) > -1, \quad k \in \Omega.$　　证毕.

系 2.1　假设 $p = 1$，即系统(2.1)只受到一个参数的摄动，则系统(2.1)鲁棒稳定当且仅当

$$-1/\mu_M(F_1) < k < -1/\mu_m(F_1). \tag{2.12}$$

式中 $\mu_m(\cdot)$ 表示矩阵·的最小负实特征值，当该矩阵没有负特征值时，记 $\mu_m(\cdot) = 0^-$，$\mu_M(\cdot)$ 表示矩阵·的最大正实特征值，当该矩阵没有正实特征值时，记 $\mu_M(\cdot) = 0^+$.

证　显然一个参数摄动时，系统(2.1)鲁棒稳定当且仅当

$$\lambda_{\min}(kF_1) > -1, \quad k \in \Omega.$$

而

$$\lambda_{\min}(kF_1) = \begin{cases} k\lambda_{\min}(F_1), & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -k\lambda_{\max}(F_1), & k < 0. \end{cases}$$

对此进行分类分析即可证明本结论.　　证毕.

系 2.2　系统(2.1)是鲁棒稳定的，如果

$$\sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i) < 1, \quad k \in \Omega. \tag{2.13}$$

证　注意到 $\sigma_{\min}(\cdot) \leqslant |\lambda_i(\cdot)| \leqslant \sigma_{\max}(\cdot)$，即可证明此结论.

3　主要结论

定义　　$F_e = [F_1, F_2, \cdots, F_p].$　　(3.1)

定理 3.1　系统(2.1)鲁棒稳定的三种界分别为

1)　$$\sum_{i=1}^{p} k_i^2 < 1/\sigma_{\max}^2(F_e), \tag{3.2}$$

2)　$$\sum_{i=1}^{p} |k_i| \sigma_{\max}(F_i) < 1, \tag{3.3}$$

3)　$$|k_j| < 1/\sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} |F_i|), \quad j = 1, \cdots, p. \tag{3.4}$$

证　我们注意到

$$\sum_{i=1}^{p} k_i^2 \sigma_{\max}^2(F_e) \geqslant \sigma_{\max}^2(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i),$$

故(3.2)成立一定有　　$\sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i) < 1.$

因此一定有 $I + (\sum_{i=1}^{p} k_i F_i)$ 非奇异.

类似地因为

$$\sum_{i=1}^{p} |k_i| \sigma_{\max}(F_i) \geqslant \sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i),$$

$$\max_j |k_j| \sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} \sigma_{\max}(|F_i|) \geqslant \sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} |k_i F_i|) \geqslant \sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i),$$

也有(2.13)式成立.

设 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义 $$M^S = (M + M^T)/2. \tag{3.5}$$
其中，M^T 为矩阵 M 的转置，即 M^S 为 M 的对称部分，显然 M^S 的特征值为实数. 如果 $M^S > 0$，即 M^S 正定，则 $-M$ 一定是稳定的，因此 M 也是非奇异的.

引理 3.1 系统(2.1)是鲁棒稳定的一个充分条件为

$$I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i^S > 0, \quad k \in \Omega. \tag{3.6}$$

证 我们不难发现

$$I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i^S = (I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i)^S, \quad k \in \Omega. \tag{3.7}$$

因此(3.6)式成立则 $I + \sum_{i=1}^{p} k_i F_i$ 一定非奇异，$k \in \Omega$，由(2.10)式知(2.7)式成立. 证毕.

现在我们已把参数空间中的鲁棒稳定性问题转化为相应的对称矩阵的正定性问题.

定义 $$F_e^S = [F_1^S, F_2^S, \cdots, F_p^S], \tag{3.8}$$
我们也有类似于定理 3.1 的结论.

系 3.1 系统(2.1)鲁棒稳定的三种界分别为

1) $$\sum_{i=1}^{p} k_i^2 < 1/\sigma_{\max}^2(F_e^S), \tag{3.9}$$

2) $$\sum_{i=1}^{p} |k_i| \sigma_{\max}(F_i^S) < 1, \tag{3.10}$$

3) $$|k_j| < 1/\sigma_{\max}(\sum_{i=1}^{p} |F_i^S|), \quad j = 1, \cdots, p. \tag{3.11}$$

引理 3.2 令 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$，$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n$，$\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$ 分别表示对称矩阵 $A, B, C = A + B$ 的特征值，那么有

$$\alpha_i + \beta_1 \leqslant \gamma_i \leqslant \alpha_i + \beta_n, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.12}$$

证明参见文[11].

引理 3.3 对于任意对称矩阵 $M_i, i = 1, \cdots, p$，一定有

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{\min}(M_i) \leqslant \lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{p} M_i). \tag{3.13}$$

重复使用引理 3.2 可证明本引理.

定理 3.2 系统(2.1)是鲁棒稳定的，如果

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \lambda_i > -1, \tag{3.14}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{\min}(F_i^S), & k_i \geqslant 0, \\ \lambda_{\max}(F_i^S), & k_i \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

证 我们不难发现式(3.6)成立当且仅当

$$\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{p} k_i F_i^S) > -1,$$

由引理 3.3 下式成立时式(3.6)一定成立

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{\min}(k_i F_i^S) > -1.$$

又因为

$$\lambda_{\min}(k_iF_i^S)=\begin{cases}k_i\lambda_{\min}(F_i^S), & k_i\geqslant 0\\ k_i\lambda_{\max}(F_i^S), & k_i\leqslant 0\end{cases}=k_i\lambda_i.$$

因此,式(3.14)成立则系统(2.1)是鲁棒稳定的.

如果对于某些 k_j 有

$$k_jF_j^S\geqslant 0, \tag{3.16}$$

或者

$$k_j\lambda_j\geqslant 0, \tag{3.17}$$

那么该不确定参数将不会影响系统的稳定性,因为

$$\sum_{i=1}^{p}k_i\lambda_i\geqslant\sum_{i=1,i\neq j}^{p}k_i\lambda_i.$$

因此稳定性判据(3.14)变为

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{p}k_i\lambda_i>-1. \tag{3.18}$$

显然在式(3.18)中需考虑的不确定参数的个数减少了,因此其保守性得到了降低.在实际过程中,我们往往可以确定参数的实际变化范围或者符号,这样我们就可利用其结构矩阵的特性—— F_i^S 的实特征值的正负性,大大扩大系统的稳定域,即如果 F_i^S 的最小实特征值大于等于0的话,$k_i>0$ 将不会影响系统的稳定性,如果 F_i^S 的最大实特征值小于等于0的话,k_i 将不会影响系统的稳定性.

4 示 例

例 1 考虑系统(2.1),其中

$$A(k)=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ -1 & -1 & -4\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

这一系统在许多文献中都进行了研究,给出了 k_1,k_2 的允许界.文[2]的方法给出的界为

$$|k_i|<1/(3\times 0.640168)=0.5207.$$

文[3]的方法给出的界为 $|k_i|<1/1.22583=0.8158$,

文[4]的方法给出的三种界分别为

$$k_1^2+k_2^2<1/(0.605485)^2=(1.6516)^2,$$

$$|k_1|/1.6523+|k_2|/2.8473<1.$$

$$|k_i|<1/0.6438=1.5533.$$

见图1中虚线围成的区域,使用本文的方法可得到如下参数摄动时系统的鲁棒稳定界:

1) 若只有参数 k_1 摄动,即 $k_2=0$,由定理2.1可得到系统的允许摄动界为 $k_1<1.75$;

2) 若只有参数 k_2 摄动,即 $k_1=0$,由定理2.1可得到系统的允许摄动界为 $k_2<3$;

3) 若两参数同时摄动,由系3.1可得到最大的摄动范围为

$$k_1^2+k_2^2<(1.7252)^2,\quad |k_1|/1.7297+|k_2|/2.7714<1,\quad |k_i|<1.3795.$$

见图1中实线围成的区域.由定理3.2我们可以得到由如下4条直线所包围的稳定区域:

$$k_1/1.7297+k_2/2.7714<1,\quad k_1/1.7297-k_2/9.9087<1,$$

$$k_1/39.2417-k_2/2.7714>-1,\quad k_1/39.2417+k_2/9.9087>-1.$$

见图1中点划线围成的区域,显然我们已将稳定区域大大扩大.

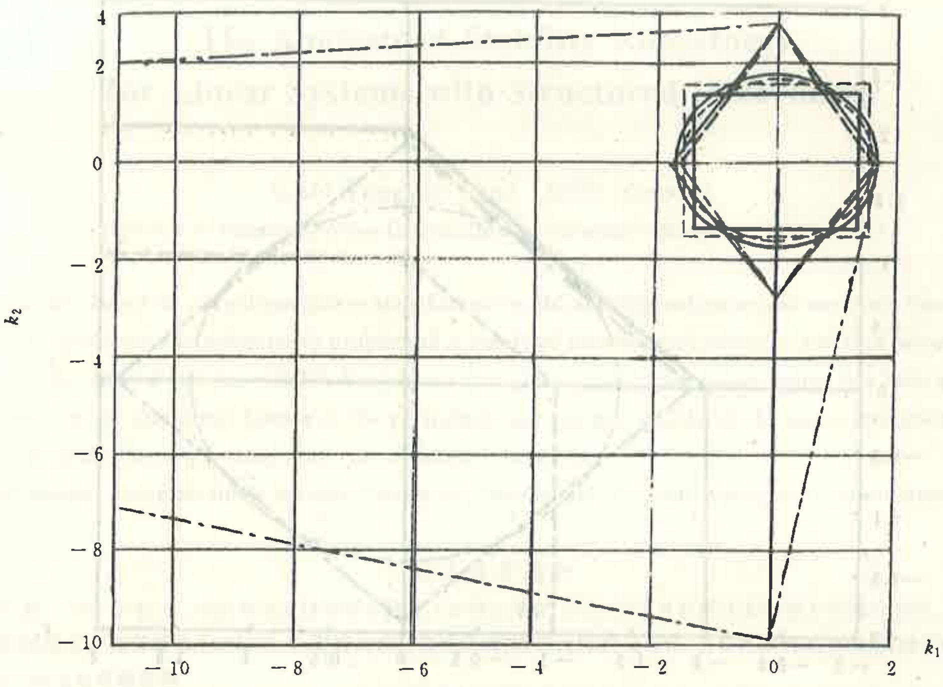

图1　例1的参数稳定区域

例 2　考虑系统(2.1),其中

$$A(k)=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

其实际稳定界为 $k_2-k_1<2$. 我们可以求得 F_i^S 的特征值为

$$\lambda(F_1^S)=\{0,0.33,0.5\},\quad \lambda(F_2^S)=\{-0.5,-0.33,0\}.$$

由定理 3.2 我们可以得到如下稳定区域：

$$k_2<2,\quad 当\ k_1>0,k_2>0,$$
$$\forall\ k_1,k_2,\quad 当\ k_1>0,k_2<0,$$
$$k_2-k_1<2,\quad 当\ k_1<0,k_2>0,$$
$$k_1>-2,\quad 当\ k_1<0,k_2<0.$$

见图 2 中实线围成的区域. 文[9]给出的稳定区域为图 2 中虚线围成的区域,显然其结果比较保守. 使用文[7]中的方法, $\alpha=0.47$ 时可得到的最大稳定区域为：

$$k_1^2+k_2^2<(1.3463)^2,\quad |k_1|/1.9039+|k_2|/1.9039+<1.$$

见图 2 中点划线所围成的区域,显然这是非常保守的.

5　结　　语

本文给出了具有结构不确定的线性系统鲁棒稳定性的一种分析方法. 并给出了系统鲁棒稳定的一些充分条件,对于常实不确定参数来说这些条件明显比已有的结论宽松. 这里的研究方法已突破了原来的 Lyapunov 方法. 得到的也就不再跟原来一样是保证系统二次稳定的比较保守的结果. 如何将这种方法扩展到离散系统以及反馈设计还有待研究.

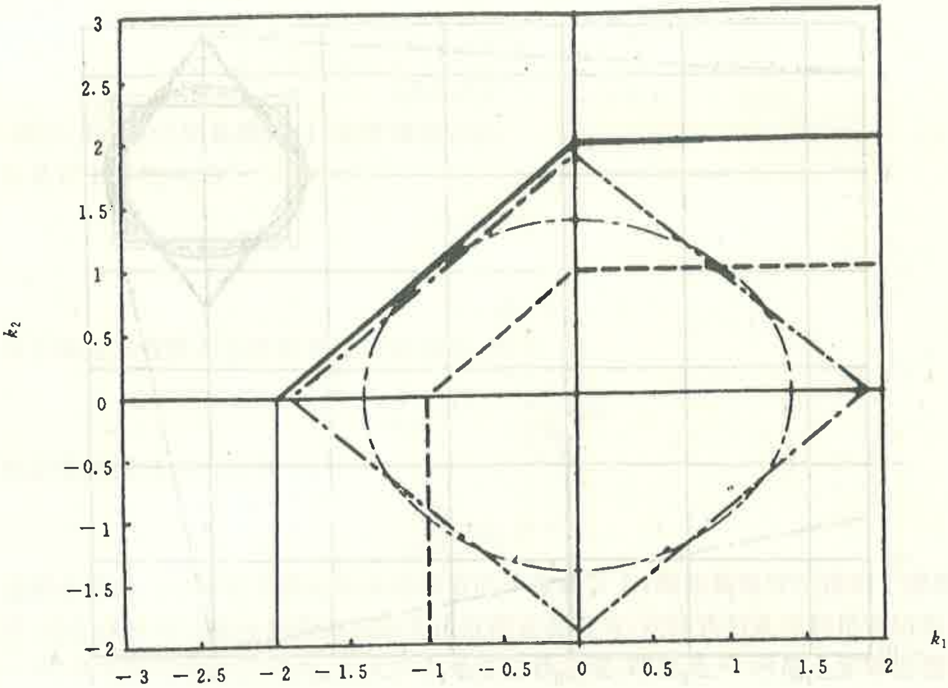

图 2 例 2 的参数稳定区域

参 考 文 献

1 Barkin, A. I. and Zelentsovsky, A. L.. Method of power transformations for analysis of stability of nonlinear control systems. Systems & Control Letters, 1983, 3: 303−310

2 Patel, R. V. and Toda, M.. Quantitative measures of robustness for multivariable systems. Proc. Joint Automat. Contr. Conf., San Francisco, CA, 1980

3 Yedavalli, R. K.. Improved measures of stability robustness for linear state space models. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30: 557−579

4 Zhou, K. and Khargonekar, P. P.. Stability robustness bounds for state space models with structured uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32: 621−623

5 Bernstein, D. S. and Haddad, W. M.. Robustness stability and performance analysis for state space systems via quadratic Lyapunov bounds. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1990. 11: 239−271

6 Bernstern, D. and Haddad, W.. Robustness stability and performance analysis for linear dynamic systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34: 751−758

7 Rern, S., Kabamba, P. T. and Bernstern, D. S.. Guardian map approach to robust stability of linear systems with constant real parameter uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39: 162−164

8 Zelentsovsky, A. L.. Nonquadratic Lyapunov functions for robust stability analysis of linear uncertain systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39: 135−138

9 Gao, Z. and Antsaklis, P. J.. Explicit asymmetric bounds for robust stability of continuous and discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38: 332−335

10 Alexander, Weinmann. Uncertain models and robust control. Springer-Verlag Wien, New York, 1991

11 Horn, R. A. and Johnson, C. A.. Matrix analysis. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1990

The Analysis of Stability Robustness for Linear Systems with Structured Uncertainty

CAO Yongyan　and　SUN Youxian

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University • Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: Based on a nonlinear power transformation, the stability robustness of uncertain linear systems has transformed into a nonsingularity problem of a family of paramatrized matrices and then some sufficient conditions are derived and the stability bounds are also given. The robust stable region has been greatly enlarged bacause the structural feature of the perturbed matrices are considered. At last, numerical results are given to compare the new bounds with that obtained previously.

Key words: uncertain linear systems; structured uncertainty; stability robustness; power transformation

本文作者简介

曹永岩　1968 年生. 于 1993 年在武汉钢铁学院获工学硕士学位, 1996 年 3 月在浙江大学获工学博士学位. 现在浙江大学工业控制技术研究所做博士后研究. 主要感兴趣的研究领域: 大系统理论及应用, 鲁棒控制理论及应用, 容错控制理论及应用, 静态输出反馈镇定等.

孙优贤　1940 年生. 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 现任浙江大学控制工程科学研究院院长, 工业控制研究所所长. 1984 年至 1987 年获德国洪堡奖学金, 长期从事过程控制, 鲁棒控制理论及应用, H_∞ 控制理论应用, 容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制, 发表论文 300 多篇, 著作 10 余本, 获各类科技进步奖 20 多项.