第 14 卷第 1 期　　控制理论与应用　　Vol. 14; No. 1
1997 年 2 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Feb., 1997

一类大规模系统的三层递阶最优控制算法*

解三明　吴沧浦　　　赵纯均
（北京理工大学自动控制系・北京，100081）（清华大学经济管理学院・北京，100084）

摘 要：对离散时间大系统的最优控制问题，应用空间和时间分解，提出一个新的三层递阶控制的并行算法．平行变量尺度(PVM)法用作求解空间分解的松驰耦合子系统．其第二层协调变量用修正的牛顿方法校正，而低层更小子问题用推广微分动态规划(DDP)并行求解．

关键词：递阶控制；混合协调；微分动态规划

1　问题的形成

考虑由 N 个相互关联子系统组成的离散时间动态大系统：

$$x(t+1)=f(x(t),u(t))+C(t)z(t),\quad t=1,2,\cdots,S,\quad x(1)\text{ 已知},\tag{1}$$

$$f(\cdot)=(f_1^{\mathrm{T}}(\cdot),\cdots,f_N^{\mathrm{T}}(\cdot))^{\mathrm{T}},\quad C(t)=\operatorname{block\,diag}(C_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,C_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},\tag{2}$$

$$x(t)=(x_1^{\mathrm{T}}(t),x_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,x_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},\quad u(t)=(u_1^{\mathrm{T}}(t),u_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,u_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},$$

$$x_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i},\quad u_i(t)\in\mathbb{R}^{m_i}.$$

其中，$\sum\limits_{i=1}^{N}n_i=n$，$\sum\limits_{i=1}^{N}m_i=m$，$f_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}(i=1,2,\cdots,N)$ 对所有的 t 关于 $x(t)$ 和 $u(t)$ 有二次连续导数．第 i 子系统与其它子系统的耦合用 $z_i(t)$ 表示：

$$z_i(t)=\sum_{j=1}^{N}M_{ij}(t)x_j(t),\quad z_i(t)\in\mathbb{R}^{r_i},\quad \sum_{i=1}^{N}r_i=r,\quad r_i<n_i,\quad r<<n.\tag{3}$$

假设被极小化的性能函数是具有可加性形式，那么有下列问题：

$$\text{问题(P)：}\quad \min_{\{u_i(t)\}}J=\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{t=1}^{S-1}g_i(x_i(t),u_i(t),z_i(t))+g_i(x_i(S))\Big],\tag{4}$$

约束：　系统动态方程式(1)和式(3)．

其中，假设 $g_i(x_i(t),u_i(t),z_i(t))$ 是凸的和 $g_i(x_i(S))$ 关于其元素有连续正定 Hessian 矩阵．

按空间分解将问题(P)分解成耦合的 N 个子问题，应用 Lagrange 乘子 $\lambda_i(t)$ 来松驰，记 $\lambda(t)=(\lambda_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\lambda_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^r$，及 $r_i\times(S-1)$ 维 $\lambda_{iS}(t)=(\lambda_i^{\mathrm{T}}(1),\lambda_i^{\mathrm{T}}(2),\cdots,\lambda_i^{\mathrm{T}}(S-1))^{\mathrm{T}}$，应用对偶定理并选 Lagrange 乘子为协调变量，则子系统的最优控制形成如下：

子问题(P_i)：$(i=1,2,\cdots,N)$

$$\min_{\substack{\{u_i(t)\}\\\{z_i(t)\}}}I_i(\lambda_{iS}(t))=\sum_{t=1}^{S-1}\Big[g_i(x_i(t),u_i(t),z_i(t))+\lambda_i^{\mathrm{T}}(t)z_i(t)$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{\mathrm{T}}(t)M_{ki}(t)x_i(t)\Big]+g_i(x_i(S)),\tag{5}$$

约束：　$x_i(t+1)=f_i(x_i(t),u_i(t))+C_i(t)z_i(t)$，　$x_i(1)$ 和 $x_i(S)$ 已知．　(6)

对给定 $\lambda_{iS}(t)$ 的值，设 $x_i^*(t)$，$u_i^*(t)$ 和 $z_i^*(t)$ 分别为子问题(P_i)的最优状态、控制和耦合变量，

---

* 国家自然科学基金资助项目．
本文 1995 年 10 月 19 日收到．1996 年 6 月 18 日收到修改稿．

$I_i^*(\lambda_{iS}(t))$ 是相应的值. 上层问题(P_H) 就是选择 $\lambda_{iS}(t)$, 极小化如下对偶函数

子问题(P_H): $\max\limits_{\lambda_{iS}(t)} \Phi_i(\lambda_{iS}(t)) = \sum\limits_{i=1}^{N} I_i^*(\lambda_{iS}(t))$, $\lambda_{iS}(t)$ 是上层协调变量. (7)

对子系统有较长的时间作分解, 取 $S = M \times T >> 1$, 划分子问题(P_i) 为 M 个更小的子系统, 每个更小的子系统具有 T 个阶段. 使用双重记号, i 是子问题下标, j 是时间划分子系统下标, t 是阶段下标. 此时有约束 $x_{ij}(T+1) = x_{i(j+1)}(1)$, $j = 1,2,\cdots,M-1$. 应用拉格朗日乘子来松驰, 子问题(P_i) 可写作下列形式:

子问题(P'_i):

$$\max_{\{p_{ij}(t)\}} \min_{\{x_{ij}(t)\}} \min_{\substack{\{u_{ij}(t)\}\\ \{z_{ij}(t)\}}} L_i(x_{ij}(t),u_{ij}(t),z_{ij}(t);\lambda_{ij}^*(t),p_{ij}(t)),$$

$$\begin{aligned} L_i(\cdot) = \sum_{j=1}^{M}\Big\{\sum_{t=1}^{T-1}\big[g_{ij}(x_{ij}(t),u_{ij}(t),z_{ij}(t)) + \lambda_{ij}^{*\mathrm{T}}(t)z_{ij}(t) - \sum_{k=1}^{N}\lambda_{ij}^{*\mathrm{T}}(t)M_{ikj}(t)x_{ij}(t)\big] \\ + p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)(x_{i(j+1)}(1) - x_{ij}(T+1)) + g_{ij}(x_{ij}(T))\Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

约束: $x_{ij}(t+1) = f_{ij}(x_{ij}(t),u_{ij}(t)) + C_{ij}(t)z_{ij}(t)$, $\quad p_{iM}(t) = x_{i(M+1)}(1) = 0$.

选择 $\{p_{ij}(t)\}_{j=1}^{M-1}$ 和 $\{x_{i(j+1)}(1)\}_{j=1}^{M-1}$ 为第二层协调变量. 子问题(P') 分解为 M 个更小的子问题,

子问题(P''_j):

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\{u_{ij}(t)\}\\ \{z_{ij}(t)\}}} L_{ij}(\cdot) = \sum_{t=1}^{T-1}\big[g_{ij}(x_{ij}(t),u_{ij}(t),z_{ij}(t)) + \lambda_{ij}^{*\mathrm{T}}(t)z_{ij}(t) - \sum_{k=1}^{N}\lambda_{ij}^{*\mathrm{T}}(t)M_{ikj}(t)x_{ij}(t)\big] \\ - p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)x_{ij}(T+1) + g_{ij}(x_{ij}(T)), \end{aligned} \tag{9}$$

约束: $$x_{ij}(t+1) = f_{ij}(x_{ij}(t),u_{ij}(t)) + C_{ij}(t)z_{ij}(t). \tag{10}$$

给定 $p_{ij}(t)$ 和 $x_{i(j+1)}(1)$, 记 $\{u_{ij}^*(t),p_{ij}(t),x_{i(j+1)}(1))\}_{t=1}^{t=T}$ 和 $\{z_{ij}^*(t),p_{ij}(t),x_{i(j+1)}(1))\}_{t=1}^{t=T}$ 为子问题(P''_j) 的最优控制, $L_{ij}^*(p_{ij}(t),x_{i(j+1)}(1))$ 是相应性能, 第二层就是找最优的 $\{p_{ij}(t)\}_{j=1}^{M-1}$ 和 $\{x_{i(j+1)}(1)\}_{j=1}^{M-1}$, 即

子问题(P''_H): $$\max_{\{p_{ij}(t)\}} \min_{\{x_{i(j+1)}(1)\}} L_{iH} = \sum_{j=1}^{M}\big[L_{ij}^*(p_{ij}(t),x_{ij}(t)) + p_{i(j-1)}^{\mathrm{T}}(t)x_{ij}(1)\big], \tag{11}$$

约束: $$p_{i0}(t) = p_{iM}(t) = 0. \tag{12}$$

2 对凸问题的混合协调算法和变量尺度算法

在第三层关键的问题是求 Hessian 阵的逆. 变量尺度法(DDP)是在两次连续迭代之间用变量和梯度来适当的计算 Hessian 阵的逆. 二次逼近动态规划法由一个反向确定可变反馈控制和一个前向名义轨迹校正所组成. 耦合变量作为第 i 个松驰子系统的控制变量.

对已知的 $p_{ij}(t)$ 和 $x_{i(j+1)}(1)$, 让 $\{\bar{u}_{ij}(t)\}$, $\{\bar{z}_{ij}(t)\}$ 是子问题(P''_j) 的名义控制集, 并且 $\{\bar{x}_{ij}(t), t = 1,2,\cdots,T+1\}$ 是相应的状态轨迹. 取子问题(P''_j) 的泰勒级数逼近,

$$\begin{aligned} &V_{ij}(p_{ij}(t),\delta x_{ij}(T)) \\ &= \min_{\substack{\delta u_{ij}(T)\\ \delta z_{ij}(T)}} \mathrm{QP}[g_{ij}(x_{ij}(T),u_{ij}(T),z_{ij}(T)) - p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)x_{ij}(T+1)] \\ &= \delta x_{ij}^{\mathrm{T}}(T)Q_{ij}(T)\delta x_{ij}(T) + \delta u_{ij}^{\mathrm{T}}(T)R_{ij}(T)\delta u_{ij}(T) + \delta z_{ij}^{\mathrm{T}}(T)S_{ij}(T)\delta z_{ij}(T) + \cdots \\ &\quad + p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)l_{ij}(T)\delta x_{ij}(T) + p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)m_{ij}(T)\delta u_{ij}(T) + p_{ij}^{\mathrm{T}}(t)n_{ij}(T)\delta z_{ij}(T) + 常数. \end{aligned} \tag{13}$$

其中 QP 记作二次逼近算子, $Q_{ij}(T)$ 等系数分别被定义. 在反向 DDP 方法中, 在状态 $T-1$ 时

刻 $V_{ij}(T-1)$ 也具有式(13)的形式. 因此对 $\delta u_{ij}(T-1)$ 和 $\delta z_{ij}(T-1)$ 的一阶必要条件为

$$\partial V_{ij}(T-1)/\partial\delta u_{ij}(T-1)=0,\quad \partial V_{ij}(T-1)/\partial\delta z_{ij}(T-1)=0. \tag{14}$$

从式(14),得线性可变反馈控制 $\delta u_{ij}(T-1)$ 和 $\delta z_{ij}(T-1)$. 对某阶段 $t(1\le t\le T-2)$,类似于二次逼近的推导,在 $t=1,2,\cdots,T-2$ 时的向前性能指标也有如上形式. 一般可变项 $\delta z_{ij}(t)$ 是其它子系统状态的线性组合. 因而 $\delta u_{ij}(t)$ 可用 $\delta x_{ij}(t)$ 和 $\delta z_{ij}(t)$ 表示:

$$\delta u_{ij}(t)=\varepsilon\alpha_{ij}(t)+\beta_{ij}(t)\delta x_{ij}(t)+\varepsilon\gamma_{ij}(t)P_{ij}(t)+\varepsilon\eta_{ij}(t)\delta z_{ij}(t),\quad \varepsilon\le 1. \tag{15}$$

这种反向求解从最后阶段开始并按反向时间计算,直到到达初始状态为止.

在前向递推中,可变反馈控制系数被用于校正名义控制:

$$\bar{u}_{ij}^{l+1}(t)=\bar{u}_{ij}^{l}(t)+\varepsilon\alpha_{ij}(t)+\beta_{1ij}(t)(\bar{x}_{ij}^{l+1}(t)-\bar{x}_{ij}^{l}(t))$$
$$+\varepsilon\gamma_{ij}(t)(\bar{z}_{ij}^{l+1}(t)-\bar{z}_{ij}^{l}(t))+\varepsilon\eta_{1ij}(t)p_{ij}(t), \tag{16}$$
$$\bar{z}_{ij}^{l+1}(t)=\bar{z}_{ij}^{l}(t)+\varepsilon\alpha_{2ij}(t)+\beta_{2ij}(t)(\bar{x}_{ij}^{l+1}(t)-\bar{x}_{ij}^{l}(t))+\varepsilon\gamma_{2ij}(t)p_{ij}(t). \tag{17}$$

$\bar{x}_{ij}^{l}$ 是在 l 次迭代时的名义状态,并具有已知的 $\bar{x}_{ij}^{l}(1)=x_{ij}(1)$. 这个前向递推是从初始阶段开始并按时间向前计算,直到到达最后阶段为止.

反向递推和前向递推迭代进行直到性能函数式(9)的值不能改进为止. 可以显示 DDP 算法接近次优控制的二次收敛率.

在第二层,应用修正牛顿方法校正协调变量如下

$$\begin{bmatrix}p_{i1}(t)\\ x_{i2}(1)\\ \cdots\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}p_{i1}(t)\\ x_{i2}(1)\\ \cdots\end{bmatrix}^{k}-\alpha_i^k H_i^{-1}\nabla L_{iH}. \tag{18}$$

这里 H_i 是式(11)中 L_{iH} 的 Hessian 矩阵,∇L_{iH} 是 L_{iH} 的梯度,$0\leqslant\alpha_i^k\leqslant 1$.

在第一层,应用共轭梯度法较正 λ_{is} 如下.

$$\lambda_{is}^{k+1}=\lambda_{is}^{k}+\eta_i S_i^k,\quad s_i^k=-\Phi_i(\lambda_{is}^k)+\frac{\|\Phi_i(\lambda_{is}^k)\|^2}{\|\nabla\Phi_i(\lambda_{is}^{k-1})\|^2}s_i^{k-1}. \tag{19}$$

k 是迭代指标,η 是步长,一旦低层的子问题被求解,$\nabla\Phi_i(\lambda_{is})$ 可容易地得到.

假设 Hessian 矩阵的逼近逆由 H_i^k 所给出,那么对校正 H_i^k 的方程是

$$H_i^{k+1}=H_i^k+\tau_i^k(\rho_i^k)(\rho_i^k)^{\mathrm T},\quad \rho_i^k=\delta_i^k-H_i^k y_i^k. \tag{20}$$

其中 $\delta_i^k=\lambda_{is}^{k+1}-\lambda_{is}^k$, $y_i^k=\nabla\Phi_i(\lambda_{is}^{k+1})-\nabla\Phi_i(\lambda_{is}^k)$. $\tau_i^k=[(\rho_i^k)^{\mathrm T}(y_i^k)]^{-1}$,并具有 $H_i^0=I$. 按牛顿方法来校正协调变量

$$\lambda_{is}^{k+1}=\lambda_{is}^k-\eta_i H_i^k\nabla\Phi_i(\lambda_{is}^k). \tag{21}$$

其中 η_i 是步长. 总结以上结果,我们得到一个新的三层递阶最优控制算法(略去).

3 模拟数值结果

取文献[3]中的例子,它是具有十一个子系统的 LQ 关联大系统问题. 其中取 $S=14, M=2, T=7, N=11, n=31, m=11, r=2$.

表 1 PVM/DDP 算法与一阶 DDP 算法的比较

	一阶 DDP 算法			PVM/DDP			
T	IT1	CPU 时间	性能值	IT2	CPU 时间	性能值	加速
3	11	1.96	182.64	3	0.13	182.64	15.1
6	23	9.38	270.21	3	0.87	270.21	10.7
10	37	26.50	300.59	5	6.30	300.59	4.20
15	63	59.86	307.98	4	16.52	307.98	3.62

IT1 是一层 DDP 方法迭代的次数;IT2 是上层迭代的次数. 这里取 $\varepsilon=0.002$.

初始状态 $x_{ij}(0)=0(i=1,2,\cdots,11)$,初始名义控制是 $\bar{u}_{ij}(t)=-2$,对所有 i,j 和 t. 在第

三层初始条件是 $\lambda_S^0 = (14,14,\cdots,14)^T$，并且第二层初始条件是 $p_{ij}(1) = (1 \quad 1)^T, i = 1,2$; $p_{ij}(1) = (1 \quad 1 \quad 1)^T (i = 3,4,\cdots,11)$. $x_{i(j+1)}^0(1) = x_{ij}^0(8) = (19 \quad 19)^T, i = 1,2$; $x_{i(j+1)}^0(1) = x_{ij}^0(8) = (19 \quad 19 \quad 19)^T, (i = 3,4,\cdots,11)$.

在第三层和低层 DDP 的收敛条件分别是 $\nabla \Phi_i(\lambda_{is}^k) \leqslant 0.0001, \dfrac{|L_{ij}^{l+1} - L_{ij}^l|}{|L_{ij}^l| + 1} \leqslant 0.00001$. 在第三层迭代和第二层迭代次数的减少及函数估计是明显加速收敛速度的关键.

4 结　　论

本文对相互关联大系统的最优控制问题，基于空间分解和协调方法及时间分解和协调方法提出一个新的三层递阶最优控制并行算法. DDP 方法迭代的次数一般是依赖于问题的. 然而，对 LQ 问题，DDP 方法可以一步迭代完成. PVM 是一个很有吸引力的方法，因为它可以减少迭代的次数，且不需要许多独立的线搜索. 即使时间长度 S 很大，时间分解方法和空间分解方法的结合可使算法得到改进.

参 考 文 献

1 Jamshidi, M.. Large-scale systems. Amsterdam: North-Holland, 1983

2 Tang, J. X., Luh, P. B. and Chang, T. S.. Mined coordination method for long-horizon optimal control problems. Int. J. Control, 1991, 53(6): 1395—1412

3 Tang, J. X., Luh, P. B. and Chang, T. S.. The mixed coordination method for nonlinear problems with separable structures. Int. J. Control, 1989, 50(4): 1461—1486

A New Three-Level Hierarchical Optimal Control Algorithm for Interconnected Large-Scale Systems

XIE Sanming and WU Cangpu
(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology · Beijing, 100081, PRC)
ZHAO Chunjun
(School of Economic Mangement, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper presents a new three-level hierarchical control parallel algorithm for solving optimal control of discrete-time large-scale systems by spatial and time decomposition. The parallel variable metric (PVM) method is found to be promising for loosely coupled subsystems. The second-level coordinating variables are updated using the modified Newton method, the low-level smaller subproblems are solved in parallel using extended differentail dynamic programming.

Key words: hierarchical control; mixed coordination; differential dynamic programming

本文作者简介

解三明 1962 年生. 1986 年在黑龙江大学获工学硕士; 1996 年在北京理工大学获博士学位. 现在清华大学做博士后研究. 研究方向为: 大系统递阶控制及优化, 稳定性, 状态估计及滤波等.

吴沧浦 1932 年生. 1952 年清华大学毕业. 1962 年中国科学院研究生毕业, 现为北京理工大学教授, 博士生导师. 主要研究领域为大系统最优化; 神经网络技术与智能控制等.

赵纯均 1941 年生. 1963 年清华大学毕业, 现为清华大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为系统工程, 遗传算法和智能控制等.