

非线性系统完全线性化方法的研究

谢 森 王 玉

(上海大学自动化学院·上海, 200032)

摘要: 本文针对非线性系统, 运用微分几何理论, 提出了一种基于完全线性化的控制方法, 同时还给出了这种非线性系统线性化的条件和状态变换的构造方法. 将这种控制方案应用在聚合反应过程中, 仿真结果表明它具有良好的跟踪能力以及较好的参数鲁棒性.

关键词: 非线性系统; 线性化; 控制器

1 引 言

完全线性化是指把状态方程线性化, 而且输出方程也线性化. 这种方法是同时用状态的非线性变换和非线性状态反馈将原非线性系统变换成状态方程及输出方程均为线性的可控可观系统. 对于变换后的线性系统, 可用线性控制理论中的状态反馈方法去控制. 因此, 这种方法比文献[1~3]中提出的方法更加简便实用, 对系统的限制条件也少, 尤其适用于对原系统被控变量的跟踪控制, 并当存在模型误差致使模型与实际对象偏差在一定范围内时, 本文提出的完全线性化控制具有一定的鲁棒性.

2 非线性系统的完全线性化控制

非线性系统完全线性化的严格定义如下:

定义 2.1 给定如下的非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

$$y = h(x). \tag{2}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n; u \in \mathbb{R}^l; y \in \mathbb{R}^m, f, g$ 是 \mathbb{R}^n 上的 C^∞ 向量场; $h(\cdot)$ 是 C^∞ 函数. 如果存在一个局部反馈控制 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ (其中 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是 C^∞ 函数) 和一个状态变换 $W: x \rightarrow \xi$ 使得反馈系统

$$\dot{\xi} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v, \tag{3}$$

$$y = h(x) \tag{4}$$

在局部坐标 ξ 下成为一个可控的线性系统

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv, \tag{5}$$

$$y = C\xi. \tag{6}$$

则称系统(1), (2)是可以完全线性化的.

Su 和 Hunt^[4,5]研究了将仿射非线性系统(1)经过状态变换 $W = (W_1, W_2, \dots, W_{n+1})$ 成为状态方程为线性的可控系统(5), 即

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \tag{7}$$

其中状态的非线性变换 W 为

$$\xi_1 = W_1(x), \xi_2 = W_2(x), \dots, \xi_n = W_n(x), v = W_{n+1}(x, u); \text{ 且 } \frac{\partial W_{n+1}}{\partial u} \neq 0. \quad (8)$$

他们把系统变换问题的归结为寻找状态变换式(8),证明了存在状态变换式(8)的充要条件是存在 C^∞ 函数 W_1 , 满足

$$\begin{aligned} \langle dW_1, ad_f^i g \rangle &> 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \\ \langle dW_1, ad_f^{n-1} g \rangle &\neq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

一旦确定了满足式(9)的 W_1 , 则式(8)中的状态变换就可按下述方法直接构成:

$$\begin{aligned} W_1 = W_2, \quad W_2 = \langle dW_1, f \rangle, \quad W_3 = \langle dW_2, f \rangle, \quad \dots, \\ W_n = \langle dW_{n-1}, f \rangle, \quad W_{n+1} = \langle dW_n, f \rangle + \langle dW_n, g \rangle u. \end{aligned} \quad (10)$$

定义 2.2 如果存在非线性变换 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$, 使得

$$\begin{aligned} \xi_1 = W_1(x) = y, \quad \xi_2 = W_2(x) = \frac{dy}{dt}, \quad \dots, \\ \xi_r = W_r(x) \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}}, \quad v = \Omega(x, u) = \sum_{k=0}^r a_k \frac{d^k y}{dt^k}, \quad \text{且 } \frac{\partial \Omega}{\partial u} \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

将原非线性系统(1)(2)变换成如下的可控可观的最小维线性系统:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_r} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_r} & \dots & -\frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha_r} \end{bmatrix} v, \quad (12)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \xi = \xi_1. \quad (13)$$

其中 r 称为可线性化指数.

定理 2.1 系统(1)(2)是最小维实现完全线性化的充要条件是存在最小的正整数 r , 使得

$$\langle dh, ad_f^{r-1} g \rangle \neq 0. \quad (14)$$

若取 $v = \Omega(x, u) = \sum_{k=0}^r a_k L_f^k h + (-1)^{r-1} \langle dh, ad_f^{r-1} g \rangle u$, (15)

则 $\frac{\partial \Omega}{\partial u} \neq 0$, 且满足 $v = \sum_{k=0}^r a_k \frac{d^k y}{dt^k}$ 故可将原系统式(1)、(2)转化为线性系统.

由定理 2.1 可得出以下推论.

推论 2.1 如果非线性系统(1)、(2)具有满足式(14)的可线性化指数 r , 那么经过状态变换式(11)和状态反馈控制式(15), 系统(1)、(2)可变换成最小维可控可观线性系统式(12)、(13).

从上面的讨论中发现, 当 $r = n$ 时, 令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n = 1$, 并对式(9)中取 $W_1 = h(x)$, 则由式(10)得

$$\begin{aligned} \xi_1 = W_1(x) = h(x), \quad \xi_2 = W_2(x) = \langle dh, f \rangle = L_f h, \\ \xi_3 = W_3(x) = \langle dL_f h, f \rangle = L_f^2 h, \dots, \xi_n = W_n(x) = \langle dL_f^{n-2} h, f \rangle = L_f^{n-1} h, \end{aligned}$$

$$v = W_{n+1}(x, u) = \langle dL_f^{n-1} h, f \rangle + \langle dL_f^{n-1} g, u \rangle = L_f^n h + (-1)^{n-1} \langle dh, ad_f^{n-1} g \rangle u.$$

所以, 式(1)也可以变换成式(7), 也就是说, 在某些条件下, $r = n, \xi_1 = h(x)$, 采用上述完全线性化的方法也可以进行状态方程的线性化. 因此 Su-Hunt 的状态方程线性化方法可以有作上

述完全线性化的一种特殊情况。

由上可知,状态反馈变换式(15)将原系统(1),(2)变换成一个可控可观的最小维线性系统(12)、(13).当然,也可以寻找到一个状态反馈变换 $v = \Omega(x, u)$,使得原系统变换成一个更高阶的线性系统.另外,式(14)的假设实际上是一个相当弱的条件.如果系统不满足此条件,那么被控变量 y 及其高阶 Lie 导数并不依赖于控制变量 u ,而这种不可控系统实际上是无意义的。

为了使原系统 u 和 y 之间的非线性关系能化为 $v \sim y$ 之间的线性关系,这就需要在 u 和 v 之间加一个完全线性化控制器,这就可以从式(15)得到

$$u = \Psi(x, u) = \frac{v - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k L^k h}{(-1)^{r-1} \alpha_r \langle dh, ad_f^{r-1} g \rangle} \quad (16)$$

注意到式(12)中参数 $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ 是可以任意配置的,这就是说线性系统 $v \sim y$ 具有任意配置的极点和特征性能.对式(12)可以用状态反馈控制

$$v = k_1(R_1 - \xi_1) + \dots + k_r(R_r - \xi_r), \quad (17)$$

以构成整个闭环控制系统,见图 1 所示.

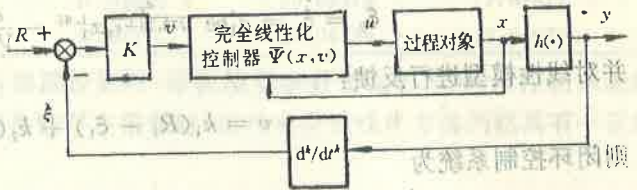


图 1 完全线性化控制系统

如果当 $k_2 = k_3 = \dots = k_r = 0, v = k_1(R_1 - y)$ 就可以实现跟踪控制,并且过程模型的非线性控制为

$$u = \frac{k_1(R_1 - y) - r(x)}{\lambda(x)} \quad (18)$$

其中

$$r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k L^k h, \quad \lambda(x) = (-1)^{r-1} \alpha_r \langle dh, ad_f^{r-1} g \rangle.$$

在式(18)的控制作用下,闭环系统误差 $R_1 - y$ 就会渐近趋于零,故收敛速度可由特征方程的特征值来确定。

3 完全线性化控制应用的仿真结果

四氟乙烯的分散聚合反应是在带搅拌的夹套反应釜内进行,其聚合反应过程数学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 e^{-\frac{a_2}{273.15+x_2}} x_1^{1.65} - a_3 x_1 + a_3 K_H P, \\ \dot{x}_2 = a_1 b e^{-\frac{a_2}{273.15+x_2}} x_1^{1.65} - \frac{c}{V_R} \left(x_2 - \frac{x_3 + T_{j0}}{2} \right), \\ \dot{x}_3 = d \left(x_2 - \frac{x_3 + T_{j0}}{2} \right) - \frac{1}{V_j} (x_3 - T_{j0}) u. \end{cases} \quad (19)$$

其中 x_1 是反应浓度, x_2 为反应温度, x_3 是夹套内冷却水出口温度, K_H 为亨利系数, P 为釜内气相压力, V_R 为反应体积, V_j 为夹套体积, T_{j0} 为冷却水进口温度, u 为冷却水流量即控制变量.控制目标要求反应温度 x_2 能够跟踪函数 $37 - 7e^{-0.002t}$ 随着时间的变化呈指数曲线上升,最后稳定在 37°C . 因此,上式可以写成类似(1)、(2)的仿射非线性模型,其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} -a_1 e^{-\frac{a_2}{273.15+x_2}} x_1^{1.65} - a_3 x_1 + a_3 K_H P \\ a_1 b e^{-\frac{a_2}{273.15+x_2}} x_1^{1.65} - \frac{c}{V_R} \left(x_2 - \frac{x_3 + T_{j0}}{2} \right) \\ d \left(x_2 - \frac{x_3 + T_{j0}}{2} \right) - \frac{1}{V_j} (x_3 - T_{j0}) u \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{V_j}(x_3 - T_{j0}) \end{bmatrix}, \quad y = x_2.$$

可控性矩阵 $[g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g]$ 是满秩的. 因此, 该聚合反应过程是可控的, 并且有

$$\langle dh, ad_f g \rangle = \frac{c}{2V_R V_j} (x_3 - T_{j0}) \neq 0.$$

因此, 聚合反应的非线性模型式(19)是满足完全线性化条件式(14), 经线性化后模型的最小维数 $r = 2$.

非线性状态变换为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_2, \\ \xi_2 &= \dot{\xi}_1 = a_1 b e^{-\frac{a_2}{273.15+x_2} x_1^{1.65}} - \frac{c}{V_R} \left(x_2 - \frac{x_3 + T_{j0}}{2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

并对线性模型进行反馈:

$$v = k_1(R_1 - \xi_1) + k_2(R_2 - \xi_2). \quad (21)$$

则闭环控制系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0 + k_1}{\alpha_2} & -\frac{\alpha_1 + k_2}{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} R_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} R_2, \quad (22)$$

$$y = \xi_1.$$

完全线性化控制器为

$$u = \frac{v - (\alpha_0 h + \alpha_1 L_f h + \alpha_2 L_f^2 h)}{-\frac{\alpha_2 c}{2V_R V_j} (x_3 - T_{j0})}. \quad (23)$$

从式(20)的状态变换中可以看到, ξ_1 为反应温度 T , ξ_2 从外部来看表示反应温度随时间变化的速率, 而从内部来看, ξ_2 实质上反映了反应放热与冷却水带走热量之间的平衡关系. 这说明采用本文提出的完全线性化方法及运用状态反馈控制式(21), 可以从本质上对系统进行控制, 得到比较好的效果.

根据实际工艺生产过程, 其中参数取 $\alpha_1 = 390022.1, \alpha_2 = 3920.483, \alpha_3 = 0.2043656, b = 43.10706, c = 0.113844, d = 1.2919 \times 10^{-3}, T_{j0} = -34, K_H = 1.295 \times 10^{-3}, P = 7.5, V_R = 440, V_j = 84$.

通过对式(19)、(20)和式(23)构成的闭环控制系统进行计算机仿真, 图 2 给出了对反应温度进行跟踪控制的结果, 其中模型状态的初始值为 $x_{10} = 8.085 \times 10^{-3} \text{ mol/L}, x_{20} = 30.046^\circ\text{C}, x_{30} = 45.885^\circ\text{C}$; 系统参数取为 $k_1 = 1.001 \times 10^{-4}, k_2 = 0.01, \alpha_0 = -1.0 \times 10^{-7}, \alpha_1 = 0.011, \alpha_2 = 225$.

从图中看到, 反应温度跟踪控制的效果是比较令人满意的, 温度上升时的最大误差小于 0.5°C .

表 1 研究了在反应温度从 30°C 上升到 37°C 时这种控制方案的鲁棒性. 其中第一组数据

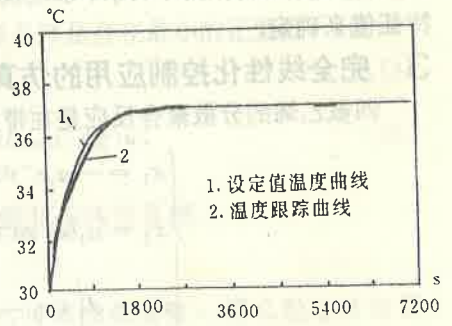


图 2 反应温度跟踪控制曲线

是模型参数无误差时的情况,以后各组为某一参数变化 $\Delta E\%$ 时的情况, E 项列出了该项偏差参数, T_{\max} 为反应温度的最大值, $T(\infty)$ 为反应温度的稳态值, $T_j(\infty)$ 为夹套出口温度的稳态值, $M_L(\infty)$ 为反应浓度的稳态值.

表 1 反应温度跟踪控制时完全线性化控制的鲁棒性研究结果

编号	E	$\Delta E(\%)$	$T_{\max}(\text{°C})$	$T(\infty)(\text{°C})$	$T_j(\infty)(\text{°C})$	$M_L(\infty) \times 10^{-2} \text{mol/L}$
1	—	—	37.03691	37.03691	-29.09378	7.69817
2	a_1	-10	37.03689	37.03689	-19.23130	7.84299
3	a_2	+1	37.03689	37.03689	-17.31939	7.87100
4	a_3	-10	37.3690	36.03690	-34.00000	7.54660
5	b	-10	37.03689	37.03689	-15.37580	7.69817
6	c	+10	37.03690	37.03690	-16.62348	7.69817
7	d	-10	37.03692	37.03692	-29.09379	7.69817
8	V_j	-10	37.01110	37.01110	-29.04396	7.69970

从表中可知,在对反应温度进行跟踪控制时,即使模型参数变化 $\pm 10\%$,该控制系统仍然具有良好的性能.这说明即使在模型参数存在偏差时,这种完全线性化方法仍然具有一定的跟踪能力和较好的鲁棒性.

参 考 文 献

- 1 Hunt, L. R., Luksic, M. and Su, R.. Exact linearization of input-output systems. *Int. J. Control*, 1986, 43(1): 247-255
- 2 Schwartz, C. A.. Linear equivalence of time varying systems. *Int. J. Control*, 1987, 45(2): 475-480
- 3 黄曙磐,程代展. 微分几何方法及其在化学反应器控制中的应用. *自动化学报*, 1988, 14(5): 330-336
- 4 Su, R.. On the linear equivalents of nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*, 1982, (2): 48-52
- 5 Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G.. Global transformation of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1983, AC-28(1): 24-30

Complete Linearization Control Method for Nonlinear System

XIE Sen and WANG Yu

(School of Automation, Shanghai University • Shanghai, 200032, PRC)

Abstract: This paper puts forward a control method based on complete linearization by differential geometric theory for nonlinear systems, and gives this linearization conditions and state transformation construction method. The simulation results show that it has good tracking ability and better parameter robustness by applying this control scheme to a polymeric reaction process.

Key words: nonlinear system; linearization; controller

本文作者简介

谢 森 1943年生. 上海大学自动化学院副院长, 教授. 已在国内外发表论文 30 余篇. 目前研究领域为自动检测与计算机控制.

王 玉 1964年生. 1989年获硕士学位, 上海大学自动化学院讲师. 目前研究领域为控制理论及其应用.