第 14 卷第 2 期
1997 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

利用输出信息的变结构控制设计方法*

毕卫萍　李文林

(河南师范大学数学系·河南新乡,453002)

摘要: 本文对有指定极点集的切换函数给出了存在条件及其一般形式,提出了利用最佳输出逼近和极点配置设计滑动模态的方法,改进和推广了文[1]的结果.

关键词: 变结构控制; 滑动模态; 极点配置; 最佳逼近

1 引　言

一般情况下,系统的状态变量不是都能得到的,我们希望直接利用系统的输出变量或由输出变量容易得到的信息来设计变结构控制,目前这方面的研究多采用状态观测器[2~6],但这种方法往往由于估计误差较大难以保证有理想的滑动模态. 文[1]给出了利用输出变量设计切换函数的条件,但是文[1]的条件依赖于一个关键矩阵 W,另外,并非所有系统都能满足文[1]给出的条件. 本文改进和推广了文[1]的结果:对有指定极点的滑动模态给出了切换函数的存在条件和一般形式;提出利用最佳输出逼近式和极点配置设计滑动模态的方法,克服了通常方法设计切换函数误差大的弊端.

2 切换函数的输出表示和最佳估计式

同文[1]一样,考虑下面可控可观系统的变结构控制问题

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad p \geqslant m, \quad C \text{ 行满秩}. \tag{2}$$

对于线性系统,通常取切换函数 $S = Lx$,考虑到实现问题,我们希望 S 能用输出表示,为此先讨论一下 $S = Lx$ 的输出表示问题.

定理 1　切换函数 $S = Lx$ 可由输出变量精确描述的充要条件是

$$L = LC^gC, \quad C^g = C^T(CC^T)^{-1}. \tag{3}$$

证　充分性显然,必然性只需用 C^g 对 $L = FC$ 作用即得.

一般的情况下不见得恰有 F,使 $Lx = Fy$,对此,我们引入状态函数的"最佳输出逼近"概念,借助这一概念解决切换函数的设计.

定义　考虑到 $\| Lx - Fy \| \leqslant \| L - FC \| \; \| x \|$,对满足下式的 F^*

$$\| L - F^*C \| = \min_F \| L - FC \|, \tag{4}$$

我们称 F^*y 为 Lx 为最佳输出逼近.

引理 1　切换函数 $S = Lx$ 的最佳输出的逼近是 $\tilde{S}] = LC^gy$.

证　注意 $L^T - C^T(C^g)^TL^T \in N(C)$, $C^T((C^g)^TL^T - F^T) \in N(C)^\perp$,利用正交性有

$$\| L - FC \|^2 = \| L^T - C^T(C^g)^TL^T \|^2 + \| C^T(C^g)^TL^T - C^TF^T \|^2 \geqslant \| L - LC^gC \|^2.$$

显然,等号成立的条件是 $FC = LC^gC$, 因此

* 国家自然科学基金和河南省教委自然科学基金资助项目.

本文于 1995 年 3 月 22 日收到. 1996 年 6 月 19 日收到修改稿.

$$\| L - LC^g C \| = \min_F \| L - FC \|.$$

由引理 1,对于一般情况我们可按下式构造切换函数

$$S = LC^g y + (L - LC^g C)\bar{x}. \tag{5}$$

其中 $\bar{x}$ 为 x 的状态估计,为了尽量减少误差,这里我们采用龙伯格降维观测器.先作状态变换

$$z = Px, \quad P = \begin{pmatrix} Q \\ C \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这里 Q 的 $n-p$ 个行向量可随意选取,只需与 C 不相关.

构造 $n-p$ 维降维观测器

$$\dot{\omega} = (I|M)(\bar{A}_{\rm I}\omega + \bar{A}_{\rm II}y + Bu - \bar{A}_{\rm I}My), \tag{7}$$

$$\bar{z}_1 = \omega - My, \quad \bar{A} = [\bar{A}_{\rm I}\bar{A}_{\rm II}]. \tag{8}$$

由(7),(8)容易导出

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}y + M\bar{A}_{21}e_1 + B_1u, \quad e_1 = \bar{z}_1 - z_1, \tag{9}$$

$$e_1 = (\bar{A}_{11} + M\bar{A}_{21})e_1. \tag{10}$$

引理 2　利用降维观测器式(7)～(10),$\bar{S}$ 可取下面形式

$$\bar{S} = LC^g y + LN\bar{z}_1. \tag{11}$$

或

$$\bar{S} = LP^{-1}\bar{z}.$$

证　注意 $N \in N(C)$ 和(4)中 P^{-1} 可取$[N\ C^g]$的形式,即可验证上式成立.

3　滑动模态的极点配置和切换函数的构造

变结构控制最本质的运动是滑动运动,为使滑动模态有希望的极点,考虑下面引理.

引理 3　设 $\lambda(A) = \{p_1,\cdots,p_m;\lambda_1,\cdots,\lambda_{(n-m)}\}$,$L$ 为 A 对应于 $p_1,\cdots,p_m$ 的左特征向量阵,T 为 A 对应于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-m}$ 的右特征向量阵,则 L 与 T 正交.

证　取 T_1 使$[T_1 \quad T]$是 A 的完全特征向量阵,则

$$A[T_1 \quad T] = [T_1 \quad T]\mathrm{diag}\{p_1,\cdots,p_m;\lambda_1,\cdots,\lambda_{(n-m)}\},$$

$$[T_1 \quad T]^{-1}A = \mathrm{diag}\{p_1,\cdots,p_m;\lambda_1,\cdots,\lambda_{(n-m)}\}[T_1 T]^{-1}.$$

记 $[T_1 \quad T]^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$,则可看出 $L_1T = 0$ 且 L_1 是 A 对应于 $p_1,\cdots,p_m$ 的左特征向量阵,因此 L 可表示为 DL_1 的形式,从而 $LT = DL_1T = 0$.

假设我们希望设计的滑动模态有指定的极点集 $\Lambda = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-m}\}$,由于$(A,B)$可控,对任意给定的 $\Gamma = \{\mu_1,\cdots,\mu_m\}$,存在 $K^0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$,使 $\lambda\{A + BK^0\} = \{\Gamma,\Lambda\}$.

为叙述方便,以下记 $A^0 = A + BK^0$,且不妨设 A^0 的极点是互不相同的.

定理 2　如果存在 Γ 使其对应的左特征向量阵 $L = LC^gC$,则可直接用输出变量构造切换函数 $S = LC^g y$,使滑动模态有希望的极点集 Λ.

证

$$\begin{aligned}\dot{S} &= LAx + LBu \\ &= L(A + BK^0)x + LB(u - K^0x) \\ &= \mathrm{dig}\{\Gamma\}Lx + LB(u - K^0x),\end{aligned}$$

由此可得滑动方程为

$$\dot{x} = (I - B(LB)^{-1}L)(A + BK^0)x. \tag{12}$$

或

$$\dot{x} = (A + BK^0)x, \quad Lx = 0. \tag{13}$$

利用 $LT = 0$ 容易验证 Λ 恰是滑动方程的极点集.

定理 3　滑动模态有指定极点集 Λ 的充要条件是 LB 可逆,且切换函数有下面形式

$$S = GLx \triangleq sx, \quad G \text{为} m \times m \text{非奇异阵}. \tag{14}$$

证 充分性. 由[6]定理4.11滑动模态存在的充要条件是 sB 非奇异，从而 LB 非奇异，再由定理2的证明知，若取切换函数 $S = GLx$ 则滑动模态必有指定极点集 Λ.

必要性. 设切换函数为 $S = \sigma x$，则滑动方程为

$$\dot{x} = (I - B(\sigma B)^{-1}\alpha)A^0 x. \tag{15}$$

比较(12)和(15)的特征多项式，容易证明存在非奇阵 G 使得 $\sigma = GL$. 所以切换函数必有如下的形式 $S = GLx$.

一般情况下，左特征向量阵 $L \neq LC^g C$，我们考虑用 Lx 的最佳估计式作切换函数.

定理4 取切换函数 $\overline{S} = LC^g y + LN\overline{z}_1$ 或 $\overline{S} = LP^{-1}\overline{z}$，则滑动模态是稳定的.

证 由引理2和(7)式

$$\begin{aligned}\dot{\overline{S}} &= LP^{-1}\overline{A}\overline{z} + LBu + LP^{-1}\begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix}\overline{A}_{21}e_1 \\ &= LAP^{-1}\overline{z} + LBu + LP^{-1}\begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix}\overline{A}_{21}e_1 \\ &= L(A + BK^0)P^{-1}\overline{z} + LB(u - K^0P^{-1}\overline{z}) + L(NM + C^g)\overline{A}_{21}e_1 \\ &= \mathrm{diag}\{\Gamma\}\overline{S} + LB(u - KP^{-1}\overline{z}) + L(NM + C^g)\overline{A}_{21}e_1.\end{aligned} \tag{16}$$

由此可得滑动方程为

$$\dot{\overline{z}} = PA^0P^{-1}\overline{z} + (I - \overline{B}(LB)^{-1}L)L(NM + C^g)\overline{A}_{21}e_1, \tag{17}$$

$$LP^{-1}\overline{z} = 0. \tag{18}$$

注意 $LP^{-1}PT = LT = 0$，不难看出 $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-m}\}$ 是上面滑动方程的极点，由观测器的构造 $e_1 \to 0$，因此滑动模态是稳定的.

4 变结构控制器和系统的稳定性

前面两节我们给出了具有理想滑动模态的切换函数设计方法，但是系统的运动并不都恰发生在切换流形上，要使设计的滑动模态真正有意义，还必需满足达到性条件

$$\dot{s}_i s_i < 0, \quad i = 1, \cdots, m.$$

由(16)得

$$\dot{\overline{S}} = \mathrm{diag}\{\Gamma\}\overline{S} + LB(u - KP^{-1}\overline{z}) + L(NM + C^g)\overline{A}_{21}e_1,$$

因此可选取变结构控制律为

$$u = KP^{-1}\overline{z} - (\varepsilon + \delta)(LB)^{-1}\mathrm{sgn}\overline{S}. \tag{19}$$

此时 $\mathrm{sgn}\ \overline{s}_i\dot{\overline{s}}_i < \lambda_i - \varepsilon_i - \delta_i + \| L(NM + C^g)\overline{A}_{21} \| \| e_1 \|$.

因为 $\lim\limits_{t\to\infty} e_1 = 0$，$\lambda_i < 0$. 从而存在 $t^0 > 0$，使得 $t \geqslant t^0$ 时

$$\| L(NM + C^g)\overline{A}_{21} \| \| e_1 \| < \delta_i.$$

于是在变结构控制律(19)下有

$$\mathrm{sgn}\ s_i\dot{s}_i \leqslant -\varepsilon_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{20}$$

满足滑动模态到达条件，系统的运动都将在有限时间内转变成稳定的滑动模态，实现全局渐近稳定.

参 考 文 献

1 Stanislaw, H. Zak and Stefen, Hu. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems. IEEE Transaction Automatic control, 1993, 38(10): 1509－1512

2 Emelyanov, S. V., Korovir, S. K., Nersisian A. L. and Nisenzon, Yu. E.. Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure control approach. Int. J. Control, 1992, 55(1): 61－81

3 Bartolini. Dynamic output feedback for observable variable structure control systems. Systems & Control Letters, 1986, 7(3): 189－193

4 Bondarev, A. G. et al.. Sliding modes in systems with asymptotic state obseners. Automation and Remote Control, 1985, 46(6): 6－11

5 郑锋. 非线性系统的变结构控制及其实现. 北京航空航天大学博士论文, 1993

6 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 科技出版社, 1990

A Design Approach of the Variable Structure Control Using Output Informations of Systems

BI Weiping and LI Wenlin

(Department of Mathematics, Henan Normal University · XinXiang, 453002, PRC)

Abstract: In this paper, the existence conditions and general forms of switching function with given poles are given. A new design approach of the variable structure control using best output approximate expression and poles assignment of sliding mode is presented, which improve and popularize the results in paper[1].

Key words: variable structure control; switching function; poles assignment; best output approximate expression

本文作者简介

毕卫萍 1963 年生. 讲师. 1984 年河南师范大学数学系毕业获学士学位, 1989 年获西北大学基础数学专业硕士学位. 研究领域为微分方程稳定性和大系统控制.

李文林 1949 年生. 教授. 1982 年获山东大学硕士学位, 1993 年获北京航空航天大学控制理论与应用专业博士学位. 研究领域为非线性控制、变结构控制、自适应控制.