第 14 卷第 2 期
1997 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

线性最优调节器二阶工程设计法及应用

薛安克　孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所·杭州,310027)

摘要:本文利用文[1]结论,给出一种实用线性最优调节器二阶工程设计法.该设计法建立了古典控制意义上的系统性能指标与二次型性能指标的关系.并给出解析算式,提出二阶最优参数域的概念.通过轧机综合最优控制系统的设计和实验,验证了该方法在工程设计中的可行性.

关键词:最优控制;线性系统;轧机

1 引　言

线性二次型最优控制问题(简称 LQ 问题)的综合,已有许多成功的方法[2].然而,真正将其作为一个一般工程方法用于各种控制系统的设计决非一件轻而易举之事.因为控制系统的工程设计通常基于系统的动态性能.诸如主导极点,衰减度及阻尼比等与系统响应直接有关的参数往往是设计的指标.却很少直接准确地给出系统各状态的加权关系.而这恰恰是 LQ 问题综合时的先决条件.由于 LQ 问题中加权 Q 阵诸参数与反馈以及系统动态性能参数的直接对应关系往往较难建立,因而导致了长期延用古典控制方法的工程界不能熟练地掌握其综合技巧.

通过希望极点配置的最优调节器设计方法,因其具有明显的工程意义,受到人们的普遍重视.其实质就是按规定的主导极点分布来选择加权阵.使设计的闭环系统,在满足 LQ 意义下最优的同时,还能达到某些具有直接工程意义的品质指标.由于工程应用中主导极点往往配置成共轭形式,二阶系统是其分布的最佳描述.同时,二阶系统的参数与动态指标、品质因素等有着简捷明了的关系,在时域分析十分方便,且时域频域转换容易,其极点分布状况和各瞬态性能指标之间的联系只需两个参数 ζ, W_n 即可反映.所以以二阶系统为基础的设计方法在工程上得到广泛地应用[3].

LQ 逆问题在一定程度上建立了古典控制意义上的系统性能参数与二次型性能指标的联系[4].但直接利用 LQ 逆问题及现有的一些结论求解,还存在诸多困难或不便.本文在文献[1]的基础上,导出工程设计中常用的两个主要动态参数,阻尼比 ζ 和振荡频率 W_n 或者系统开环极点与二次性能指标中加权阵 Q 和最优反馈阵 K 之间的解析关系,并给出二阶最优参数域的计算公式.从而大大简化了设计过程.

2 基本算法

给定二阶单输入系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

为方便叙述,不失一般性,设 (A,b) 为能控标准型,即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

本文于 1995 年 9 月 4 日收到.1996 年 7 月 17 日收到修改稿.

控制律为

$$u = K^{\mathrm{T}}x. \tag{2.2}$$

若状态反馈后系统的闭环传递函数为

$$G_c(s)\ \frac{G_0(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{2.3}$$

其中 ζ、ω_n 是希望的系统动态性能指标. $G_0(s)$ 与分母无公共因子. 由此可得到希望闭环极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\quad (\zeta < 1)$$

使系统闭环极点配置在希望值上的状态反馈阵 K 为

$$K^{\mathrm{T}} = (k_1\quad k_2) = (a_2 - \omega_n^2\quad a_1 - 2\zeta\omega_n). \tag{2.4}$$

显然,对上述反馈阵 K,未必能使以下二次型性能指标达极小. 即反馈后的闭环系统,虽然具有期望的过渡过程品质,但不一定是 LQ 意义下的最优系统.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}u)\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

其中 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0$.

最优性的工程意义,不但在于能合理调整系统各状态间的约束和加权关系,而且可以根据需要约束系统的控制能量. 这些都是提高系统可靠性及经济性的重要措施. 下面我们推导使系统(2.1)既有希望极点配置又满足性能指标最优的二阶工程设计法. 由于篇幅所限,本文不再赘述文[1]的逆算法定理及有关结论.

2.1 基于动态参数 ζ,ω_n 的二阶 LQ 工程设计法

对(2.1)所示的二阶系统,由于

$$\begin{aligned}\Phi(s^2) &= P(-s)P(s) - \varphi(-s)\varphi(s)\\ &= (-2k_1 + 2a_1k_2 - k_2^2)s^2 - 2a_2k_1 + k_1^2.\end{aligned}$$

所以[1]

$$\begin{cases}C_0 - A_0 = -2a_2k_1 + k_1^2,\\ C_1 - A_1 = -2k_1 + 2a_1k_2 - k_2^2.\end{cases}$$

根据文[1]结论,可求得系统既有希望极点配置,又使性能指标(2.5)式最小的最优反馈阵 K 应满足的条件

$$\begin{cases}-2a_2k_1 + k_1^2 \geqslant 0,\\ -2k_1 + 2a_1k_2 - k_2^2 \leqslant 0.\end{cases} \tag{2.6}$$

对应的加权阵为

$$Q = \mathrm{diag}(-2a_2k_1 + k_1^2\quad k_2^2 - 2a_1k_2 + 2k_1), \tag{2.7}$$

比较式(2.4),可知构成 LQ 意义下最优二阶闭环系统的动态参数 ζ,ω_n 应满足的条件为

$$\begin{cases}\omega_n^4 - a_2^2 \geqslant 0,\\ 2(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 + 2a_2 - a_1^2 \geqslant 0.\end{cases} \tag{2.8}$$

相应的加权阵为

$$Q = \mathrm{diag}(\omega_n^4 - a_2^2\quad 2(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 + 2a_2 - a_1^2), \tag{2.9}$$

进一步,利用文[1]定理及二阶系统 $\Phi(s^2)$ 表达式,可推出 LQ 意义下最优动态参数 ζ 与 ω_n 应满足的关系如下

$$\zeta \geqslant \frac{1}{2}[1 + \frac{a_1^2 - 2a_1}{\omega_n^2} + \frac{a_2^2}{\omega_n^4}]^{1/2}. \tag{2.10}$$

如果 $\omega_n^4 + (a_1^2 - 2a_1)\omega_n^2 + a_2^2 < 0$，则 ζ 可任取.

2.2 基于系统开环极点的二阶 LQ 工程设计法

设 λ_1,λ_2 为二阶系统(2.1)的开环极点，则有 $\lambda_1+\lambda_2=-a_2$，$\lambda_1\cdot\lambda_2=a_1$，代入式(2.6)得

$$\begin{cases} k_1^2 + 2(\lambda_1+\lambda_2)k_1 \geqslant 0, \\ k_2^2 + 2k_1 + 2\lambda_1\lambda_2 k_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

由(2.11)式可解得满足 LQ 意义下最优反馈系数与开环极点的一组关系式

$$\begin{cases} k_1 > -2(\lambda_1+\lambda_2)(\text{当 } k_1 > 0) \text{ 或 } k_1 < -2(\lambda_1+\lambda_2)(\text{当 } k_1 < 0), \\ (k_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \geqslant -2k_1 + \lambda_1^2\lambda_2^2. \end{cases} \tag{2.12}$$

对应加权阵的取法与式(2.7)相同.

依据式(2.12)，可作出最优反馈系数与系统开环极点的相关区域 $\Omega(k,\lambda)$，我们称其为二阶最优参数域，基于系统开环极点设计的意义在于找出使闭环系统达最优的反馈系数的范围. 因为在实际工程设计中，希望极点并不是一次即可准确选定的. 对反馈系数的选择同样也是这样，要通过多次反复调整. 给出区域 $\Omega(k,\lambda)$，则无疑对希望极点的确定及反馈系数的选定提供方便. 下面以轧机控制系统设计为例，说明 LQ 二阶工程设计法的工程应用.

3 冷轧机板形板厚最优控制系统设计

由文献[5]可得四辊可逆冷轧机综合控制系统如图 1 所示.

取状态 $x_1 = \Delta k$(纵向厚差)，$x_2 = \Delta P_L$(油缸油压差)，$f = \Delta P$ (轧制压力差). 该系统状态方程为

$$\dot{x} = Ax + bu + cf, \tag{3.1}$$

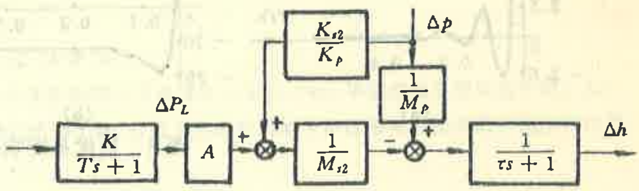

图 1　轧机综合控制系统框图

其中

$$A = \begin{pmatrix} -3.3 & -2.30 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 0.047 \\ 18.9 \end{pmatrix}.$$

3.1 基于系统动态参数设计

这是一个简化的二阶系统. 根据液压伺服系统油压限制及轧机轧制过程的动态特性及现场经验，设定系统的动态参数为 $\zeta = 0.727$，$\omega_n = 157.08$. 验证(2.10)式可知所选的 ζ,ω_n 是一组最优参数. 应用上文所述的二阶工程设计法，即可求得最优反馈增益阵为

$$K = (1.3 \quad -2.7).$$

对应最优加权阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 3.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.43 \end{pmatrix}.$$

3.2 基于系统开环极点设计

该系统的开环极点为 $\lambda_1 = -3.3$，$\lambda_2 = -10$. 通过分析系统动态特性及根轨迹分布，可大致确定最优反馈系数的取值范围为 $k_1 > 0$，$k_2 > 0$. 对应的关系式(2.12)为

$$(k_2 - 0.125)^2 \geqslant 5.74k_1 + 0.016. \tag{3.2}$$

由上式即可作出如图 2 所示的使系统具有二次性能最优的状态反馈参数域 $\Omega(k,\lambda)$.

显然，对图 2 中最优参数域 $\Omega(k,\lambda)$ 中的任何点，都构成最优线性调节器. 并可根据式(2.7)求得对应的最优加权阵. 由此可见，最优参数域 $\Omega(k,\lambda)$ 的建立，给工程设计中选择最优反馈增益带来了方便，减少了参数选择的盲目性.

4　实验结果

本文利用 PC386 微机,对以上设计的板形板厚综合最优控制系统进行了实验室样机模拟仿真试验. 系统状态通过 A/D 采样输入微机,最优控制信号则经 D/A 转换后输出.

图 3 为最优系统动态响应实验曲线,结果表明系统调节时间小于 200ms,油缸油压完全在限定范围,板形板厚调节精度较高. 实验结果还表明,该系统具有良好的动态性能和鲁棒性. 为作比较,图 4 给出了当最优反馈参数取 $\Omega(k,\lambda)$ 参数域边界值时(即此时系统为临界最优状况)的实验结果,此时,控制能量和超调量明显增大,调节时间加长,且系统振荡厉害,稳态精度变差.

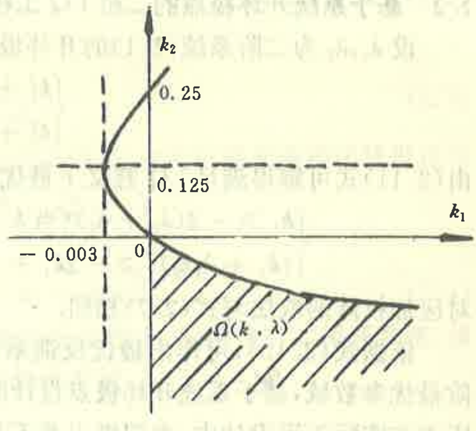

图 2　最优反馈增益区域图

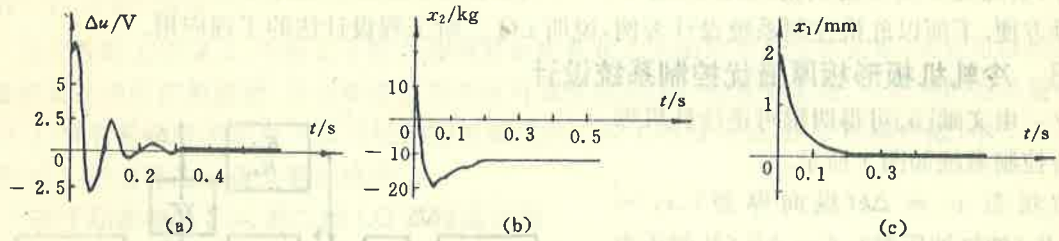

图 3　最优系统响应曲线

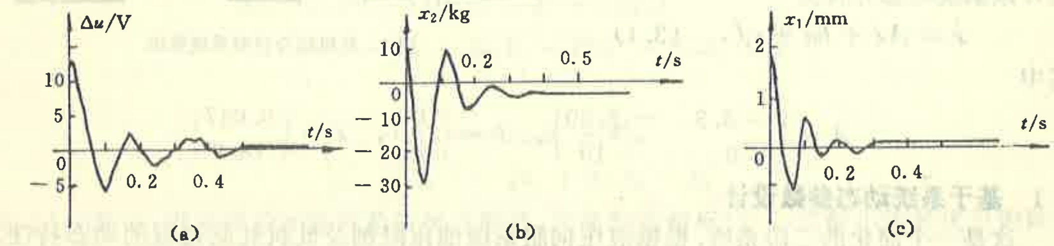

图 4　临界最优响应曲线

5　结束语

本文给出了一个实用的二阶最优调节器工程设计法. 该方法的简单易行性是显而易见的. 由于建立了系统动态性能参数与最优反馈阵和性能指标加权阵三者间的解析关系,并在给出二阶最优参数域的同时,给出其计算公式. 因此该方法具有一定的工程实用价值.

在此,值得一提的是,基于动态参数设计可使系统既能配置希望极点,同时又为最优. 而基于系统开环极点设计则未必能配置极点到希望位置. 最优参数域仅提供了取最优值的参考范围. 具体设计中,两者可有机配合.

参 考 文 献

1　宋维公,薛安克. LQP 逆算法及其在带材轧机板形板厚综合控制系统设计中的应用. 控制理论与应用,1989,6(增刊 2):65−71

2　Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear optimal control. Prentice-Hall, 1971

3 陆道政，季新宝. 自动控制原理及设计. 上海：上海科技出版社，1978
4 Kalman, R. E.. When is a linear control system optimal. Trans. ASME(D), 1964, 86(1): 51－60
5 连家创. 四辊轧机支承辊弯曲新结构的研究. 东北重型机械学院学报，1982，37(3)：21－26

A Design Method of Linear Quadratic Optimal Regulator for Two-Order System and Its Application

XUE Anke and SUN Youxian
(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: This paper proposes a practical design method of linear quadratic optimal regulator for tow-order system. The method relates the system index of transient property in the senes of classical control to the quadratic criteria of the optimal linear regulator. An analytical algorithm and a new concept of optimal parameter region for tow-order system are given in this paper. The design and test for the synthetical optimal control system of strip mill by microcomputer show the correctness and practicability of the method in engineering application.

Key words: optimal control; linera system; strip mill

本文作者简介

薛安克 1957 年生. 副教授. 1982 年获山东大学数学系控制理论专业理学士学位，1986 年获东北重型机械学院工业自动化专业工学硕士学位，现为浙江大学工业控制技术研究所博士生. 目前主要研究领域为最优鲁棒控制理论以及工程应用等.

孙优贤 见本刊 1997 年第 1 期第 41 页.