第 14 卷第 2 期
1997 年 4 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 14, No. 2
Apr., 1997

线性多变量模型跟踪控制系统的参考模型设计*

周　军　周凤岐
(西北工业大学航天工程学院・西安,710072)

摘要: 本文针对线性多变量模型跟踪控制系统,研究了参考模型设计不当对稳态跟踪特性和控制效益的不良影响;确定了参考模型的设计准则,强调参考模型应当与被控对象的主要外在特性相一致;据此提出了一种一般性的规范化设计方法,并证明了所得参考模型不仅满足完全模型跟踪的条件,而且完全可控.

关键词: 模型跟踪控制; 参考模型; 线性多变量控制; 完全模型跟踪条件

1　引　言

模型跟踪控制是通过迫使被控对象跟踪具有理想动态特性和稳态品质的参考模型来获得期望的闭环系统性能[1],所以确定参考模型是一个关键问题,直接影响系统特性.但目前各类模型跟踪控制系统研究中,参考模型的设计仅按系统性能指标要求确定其特征结构,而对其具体结构的确定尚无一种有效的一般性方法.实际上即使对于线性定常系统,人们也至今不能全面地阐述参考模型确定的准则是什么,其结构与被控对象的关系应如何,以及是否存在一般性的规范化设计方法等问题.所以本文就此展开的研究具有重要的理论意义和工程价值.

2　参考模型的设计准则

考虑 n 阶 m 变量线性系统

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX \in \mathbb{R}^k, \quad k \leqslant m. \tag{1}$$

不失一般性,(A,B) 完全可控,B 列满秩,C 行满秩.若设系统指令输入或期望输出为 $Y_c \in \mathbb{R}^k$,则模型跟踪控制系统稳态的理想跟踪即为

$$\lim_{t\to\infty} \| Y_c - Y \| = 0 \quad 且 \quad \lim_{t\to\infty} \| X \| < \infty. \tag{2}$$

被控对象(1)的理想参考模型可以描述为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m, \quad X_m \in \mathbb{R}^n, \quad U_m \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

我们认为该参考模型应按以下四条准则来设计:

Ⅰ 具有满足性能指标设计要求的特征结构,以保证闭环系统的动态特性;

Ⅱ 具有适当的数学形式,与被控对象(1)满足完全模型跟踪条件,以保证稳态跟踪精度;

Ⅲ 具有与被控对象(1)的主要外在结构(即除特征结构外的结构)特性尽量一致的数学描述,以提高系统的控制效益;

Ⅳ (A_m, B_m) 完全可控,A_m 满秩,B_m 列满秩,以确保模型跟踪误差收敛特性的可选择性.

准则 Ⅰ 和 Ⅳ 为人们所熟知,它们对系统的影响不再赘述.定义 $e = X_m - X$,则误差方程就为

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A)X + B_m U_m - BU. \tag{4}$$

当Erzberger完全模型跟踪条件[2]

* 博士点科学基金、航天科学基金资助项目.
本文于 1994 年 8 月 27 日收到. 1996 年 5 月 17 日收到修改稿.

$$\mathrm{rank}[B] = \mathrm{rank}[B \quad (A_m - A)] = \mathrm{rank}[B \quad B_m] \tag{5}$$

成立时,总存在反馈控制律 U 使式(4)成为渐近稳定的自治系统,从而实现模型跟踪的设计目的(2). 反之,当参考模型设计不满足准则 Ⅱ 时,即使被控对象是确知的线性定常系统,它对参考模型也将存在稳态跟踪偏差 $\lim\limits_{t\to\infty} e \neq 0$,导致整个系统的品质变劣,甚至失效.

而本文确立准则 Ⅲ 的基本出发点在于:由于 U 总与 B^+B_m, $B^+(A_m - A)$,即与参考模型和被控对象的结构差别有关[1],所以在确保参考模型具有理想特征结构的前提下,使 A_m 和 B_m 尽量与 A 和 B 的其它结构特性一致,就能有效地减少反馈增益,降低控制量幅值. 相反,若准则 Ⅲ 不满足,当控制不受限制时,控制量幅值加大将导致能量消耗增加;而控制受限制时,除能量外,系统的动态跟踪特性也会受到很大影响而变劣.

总之,参考模型影响着模型跟踪控制系统的一系列关键特性. 但一般情况下,要直接获得同时满足上述四条准则的参考模型很困难,因此需要一种规范化的一般性设计方法.

3 参考模型的设计方法

设满足性能指标要求的 n 个理想特征值为 $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots, \lambda_{mn} \neq 0$. 因 (A, B) 完全可控,故总有满秩线性变换 T, 可将式(1)化为 Wonham 可控标准型[3]:

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{ll} \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in_i} \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}; \tag{6}$$

$$\overline{B} = TB = \left[\begin{array}{ccc|c} B_1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & B_l & \end{array}\right]_{n\times m}, \quad B_i = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}_{n_i\times 1}. \tag{7}$$

式中 $1 \leqslant i \leqslant l \leqslant m$,且 $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i = n$. 又因为系统特征值和特征多项式对满秩变换具有不变性,故

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \prod_{i=1}^{l} \det(sI - A_{ii}) \triangleq \prod_{i=1}^{l} \varphi_i(s) = \prod_{i=1}^{l} (s^{n_i} - a_{in_i}s^{n_i-1} - \cdots - a_{i1}). \tag{8}$$

将 $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots, \lambda_{mn}$ 按 $\varphi_i(s)$ 的阶次分为 l 组,复特征值共轭成对地出现在同一组中:$\{\lambda'_{m1}, \lambda'_{m2}, \cdots, \lambda'_{mn_1}\}, \{\lambda^2_{m1}, \lambda^2_{m2}, \cdots, \lambda^2_{mn_2}\}, \cdots, \{\lambda^l_{m1}, \lambda^l_{m2}, \cdots, \lambda^l_{mn_l}\}$. 则与 $\varphi(s)$ 相应,参考模型的特征多项式 $\varphi_m(s)$ 就为

$$\varphi_m(s) = \det(sI - A_m) = \prod_{k=1}^{n} (s - \lambda_{mk}) = \prod_{i=1}^{l} \varphi_{mi}(s), \tag{9}$$

$$\varphi_{mi}(s) = \prod_{j=1}^{n_i} (s - \lambda^i_{mj}) = \prod_{i=1}^{l} (s^{n_i} - a^m_{in_i}s^{n_i-1} - \cdots - a^m_{i1}).$$

由 $\varphi_{mi}(s)$ 可构造相应于 A_{ii} 的矩阵 $A^m_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$. 于是设计参考模型(3)的 $A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$A_m = T^{-1}\overline{A}_m T = T^{-1} \begin{bmatrix} A^m_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ & A^m_{22} & \cdots & A_{2l} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & A^m_{ll} \end{bmatrix} T, \quad A^m_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a^m_{i1} & a^m_{i2} & \cdots & a^m_{in_i} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其次,选定 $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 满秩. 特殊地,可取 $K = I_{m\times m}$. 那么设计参考模型的控制矩阵为

$$B_m = BK. \tag{11}$$

考虑到 $\lim_{t\to\infty}\dot{Y}_c = 0$ 时，控制系统应保证式(2)成立，故从稳态时 $\lim_{t\to\infty}\dot{X}_m = 0$ 可推导出

$$Y_c = -CA_m^{-1}B_mU_m, \quad (CA_m^{-1}B_m) \in \mathbb{R}^{k\times m}, \quad k \leqslant m.$$

求该相容(有唯一或不唯一解存在)的线性方程组的极小范数解[4]，便可确定参考输入

$$U_m = -(CA_m^{-1}B_m)^{+}Y_c. \tag{12}$$

最后取初始状态 $X_m(t_0) = X(t_0)$ 或 $X_m(t_0) = 0$. 至此，被控对象(1)的参考模型(3)就完全确定了.

4　参考模型的分析

4.1　准则Ⅰ的符合

考察式(9)和(10)知道，本文的设计方法已直接将满足性能指标要求的 n 个理想特征值 $\lambda_{m1},\lambda_{m2},\cdots,\lambda_{mn}$ 赋予了 A_m，所以参考模型(3)必定具有理想的动态特性，满足准则Ⅰ.

4.2　准则Ⅱ的符合

定理 1　对于被控对象(1)，式(10)～(12)确定的参考模型满足完全模型跟踪条件(5).

证　对于被控对象(1)，因存在满秩线性变换 T 使式(6)，(7)和(10)成立，故

$$\mathrm{rank}[\bar{B} \quad (\bar{A}_m - A)] = \mathrm{rank}[\bar{B}] = \mathrm{rank}[TB] = \mathrm{rank}[B],$$

所以
$$\mathrm{rank}[B \quad (A_m - A)] = \mathrm{rank}[\bar{B} \quad (\bar{A}_m - \bar{A})T] = \mathrm{rank}[B].$$

又因 B_m 由式(11)确定，故也必满足式(5).　　证毕.

可见对任意线性系统(1)，本文设计的参考模型(3)总符合准则Ⅱ,能保证系统的稳态精度.

4.3　准则Ⅲ的符合

分析式(6)知，A_{ii} 包含了 A 的全部特征值，完全决定了被控对象(1)的动态特性；$A_{ij}(i<j)$ 和 T 则描述了被控对象除此以外的主要外在结构性质，如状态的耦合和变换关系等，与动态特性无关. A_{ii}，A_{ij} 和 T 都是被控对象所固有的. 又从式(10)可见，A_m 完全继承了 A_{ij} 和 T，仅将 A_{ii} 替换为包含全部理想特征值的 A_{ii}^m. 因此该参考模型不仅具备理想的动态特性，还具备了被控对象的主要外在结构性质，实现了与被控对象的最小结构差别. 符合准则Ⅲ.

需强调的是，该参考模型设计方法充分利用了被控对象的模型参数，避免了选定 A_m 大量元素的困难，只需按性能指标确定其特征值即可，从而使设计过程简单规范化.

4.4　准则Ⅳ的符合

定理 2　式(10)～(12)确定的参考模型中，A_m 满秩，，B_m 列满秩，(A_m,B_m) 完全可控.

证　由式(10)知，$A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 包含了 n 个非零理想特征值，故 A_m 满秩；又因为式(11)中 K 满秩，故

$$\mathrm{rank}[B_m] = \mathrm{rank}[B] = m,$$

即 $B_m \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 列满秩.

令参考模型(3)的可控性矩阵为 $Q_{mc} \in \mathbb{R}^{n\times nm}$，则

$$\begin{aligned} Q_{mc} &= [B_m \quad A_mB_m \quad \cdots \quad A_m^{n-1}B_m] \\ &= [B \quad A_mB \quad \cdots \quad A_m^{n-1}B]\cdot \mathrm{diag}(K,\cdots,K) \triangleq Q'_{mc}D. \end{aligned}$$

从式(6)和(10)知 A_m 与 A 结构上完全相同，故 (A_m,B) 与 (A,B) 均完全可控，即 $\mathrm{rank}[Q'_{mc}] = n$；加之 K 满秩，$\mathrm{rank}[D] = nm$，所以利用矩阵的 Sylvester 不等式得：

$$\mathrm{rank}[Q_{mc}'] + \mathrm{rank}[D] - nm \leqslant \mathrm{rank}[Q_{mc}] \leqslant \min\{\mathrm{rank}[Q_{mc}'],\mathrm{rank}[D]\}.$$

显然 $\mathrm{rank}[Q_{mc}] = n$，所以 (A_m,B_m) 完全可控.　　证毕.

该定理表明运用本文方法设计的线性多变量系统(1)的参考模型一定符合准则Ⅳ.

4.5 实例分析

本文基于文献[5]提供的导弹三通道弹体方程，在冻结系数情况下用上述方法设计了三变量六阶参考模型和相应模型跟踪控制系统，并进行仿真.其理想特征值分别为：

俯仰：$\lambda_{1,2}=-9.41\pm 7.06j$，偏航：$\lambda_{3,4}=-10.59\pm 5.13j$，滚动：$\lambda_{5,6}=-8.75\pm 8.93j$.

并取 $K=I_{3\times 3}$.限于篇幅，仿真结果与[5]比较简述如下：[5]中因参考模型失配产生的稳态跟踪误差消失，执行机构饱和推迟，导弹高空特性改善，表明控制量幅值较小，效益提高了.

5 结 论

本文提出的参考模型四条设计准则合理全面地反映了模型跟踪控制系统的要求；据此针对线性多变量对象研究的参考模型设计方法规范且具有一般性；所得参考模型不仅满足动态性能指标和完全模型跟踪条件，而且完全可控；从而消除了参考模型设计不当对闭环系统动态特性、稳态品质和控制效益等产生的不良影响，具有重要的理论意义和应用价值.

参 考 文 献

1 朗道著，吴百凡译.自适应控制——模型参考方法.北京：国防工业出版社，1985，3—131

2 Erzberger H. and Field M.. Analysis and design of model following control system by state space techniques. Proceedings of ACC，1968，572—581.

3 何关珏著.线性控制系统理论.沈阳：辽宁人民出版社，1982，278—290

4 程云鹏主编.矩阵论.西安：西北工业大学出版社，1989，321—369

5 周军，周凤岐，冯文剑，郑焕敏.基于变结构控制理论的 BTT 导弹自动驾驶仪三通道独立设计.宇航学报，1994，15(1)：42—47

Research on Reference Model Design for Linear Multivariable Model Following Control Systems

ZHOU Jun and ZHOU Fengqi

(College of Astronautics，Northwestern Polytechnical University · Xi'an，710072，PRC)

Abstract：In this paper，some bad influence of unsuitably designed reference models on linear multivariable model following control systems is analysed. In order to eliminate the influence，four reference model design criteria，which emphasis that the reference models should possess not only ideally placed characteristic structures but also similar external properties to the plants，are proposed. Based on the criteria，a standard and general design method is studied in detail. Finally，it is proved that the reference models out of the method not only satisfy the perfect model following conditions，but also is controllable.

Key words：model following control；reference model；linear multivariable control；perfect model following condition

本文作者简介

周 军 1966年生.1993年毕业于西北工业大学航天工程学院飞行器控制、制导与仿真学科，获工学博士学位.后于中国空间技术研究院北京控制工程研究所进行博士后研究，现为西北工业大学航天工程学院副教授.主要从事变结构自适应控制理论及其在航空航天飞行器控制、制导与仿真中的应用，柔性结构主动控制理论及实验等方面的研究.

周凤岐 1935年生.1959年毕业于西北工业大学飞机系.现为西北工业大学航天工程学院教授、博士生导师.主要从事变结构自适应控制，神经元网络，最优估计，系统辨识及它们在航空航天飞行器控制，制导和仿真中的应用研究.